

方法精讲-数量 2

主讲教师：唐宋

授课时间：2019.05.02



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量 2（笔记）

第四节 工程问题

【知识点】工程问题：

1. 研究三个量之间的关系——总量、效率、时间。三量关系：总量=效率*时间。做任何一个工作，都可以量化，比如翻 1000 页书、搬 1000 块砖。单位时间干的多少就是效率。比如老师去搬砖，需要搬 1000 块，每小时搬 50 块，则 20 小时可以搬完， $1000=50/h*20h$ 。

2. 考查题型：

（1）给完工时间型：

①赋总量（完工时间的公倍数）。直接给甲需要几小时、乙需要几小时，问合作需要多少时间之类问题，重点是给时间。

②算效率：效率=总量/时间。总量是时间的公倍数，用公倍数除，可以很好的计算效率。

③根据工作过程列方程或式子。

④引例. 要折叠一批纸飞机，若甲单独折叠要半个小时完成，乙单独折叠需要 45 分钟完成。若两人一起折，需要多少分钟完成？

A. 10

B. 15

C. 16

D. 18

答：甲、乙做纸飞机的快慢不同，但是具体量是不知道的。（1）赋总量，整个题目没有纸飞机的总量，答案也没有求纸飞机总量，说明可以赋值。如果设总量为 1 个纸飞机，则甲或乙 1 分钟折 xx 分之一，不好算，因此赋值总量为 30 和 45 的公倍数 90。（2）甲效率= $90/30=3$ 个/分，乙效率= $90/45=2$ 个/分。（3）时间=总量/效率和= $90/(3+2)=18$ 分钟。

（2）给效率比例型。没有给需要多少时间，告诉甲、乙的效率比例（快慢的比例关系），后面题目有类似 $a:b:c$ 的数据，是给效率比例型的题目。

（3）给具体单位型。比如挖 1000 吨泥土，或铺 500 米路，出现了具体量，告诉具体工作多少，前面两种是没有给具体量的。

【例 1】（2018 江苏）手工制作一批元宵节花灯，甲、乙、丙三位师傅单独做，分别需要 40 小时、48 小时、60 小时完成。如果三位师傅共同制作 4 小时后，剩余任务由乙、丙一起完成，则乙在整个花灯制作过程中所投入的时间是：

- A. 24 小时 B. 25 小时
C. 26 小时 D. 28 小时

【解析】例 1.（1）“甲、乙、丙三位师傅单独做，分别需要 40 小时、48 小时、60 小时完成”，求 40 小时、48 小时、60 小时的公倍数，三者共同约数有 4，还剩 10、12、15，没有共同的约数，找 10 和 12，可以约 2，还剩 5、6、15，5 和 15 可以约 5，还剩 1、6、3（只有两个能约，第三个数照抄即可），其中 3 能被 6 整除，则最大公约数=4*2*5*6=240。

考场上不要求最小公倍数，求三者共同的倍数，可以先看 40 和 60 的公倍数是 120。再找 120 和 48，公倍数为 480，也可以。但是先求两个再和第三个找的方法，可能求出来的不是最小公倍数，优点是可以快一点。故赋值总量为 240。

（2）算效率，甲=240/40=6、乙=240/48=5、丙=240/60=4。（3）根据工作过程列方程，设后面乙、丙一起完成的时间为 t ， $(6+5+4) * 4 + (5+4) * t = 240$ ， $60+9t=240$ ，解得 $t=20$ 小时。问的是乙在整个花灯制作过程中所投入的时间，乙

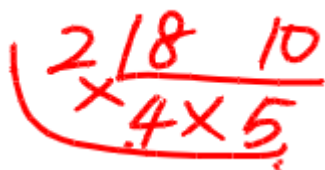
在面前还工作了 4 小时，因此共工作 $4+20=24$ 小时。【选 A】

【注意】工程问题赋值总量，不要求必须是最小公倍数，总量是自己赋值的，可以是 1、120、1200，不要纠结赋值不同导致答案不同，不会出现这种情况。但总量建议尽量赋值成最小公倍数，可以减少计算量。

【例 2】（2019 北京）录入员小张和小李需要合作完成一项录入任务，这项任务小李一人需要 8 小时，小张一人需要 10 小时。两人在共同工作了 3 个小时后，小李因故回了趟家，期间小张一直在工作，小李返回后两个人又用了 1 个小时就完成了任务。在完成这项任务的过程中，小张比小李多工作了几个小时？

- A. 1
B. 1.5
C. 2
D. 2.5

【解析】例 2. 合作完成一项任务是工程问题，“小李一人需要 8 小时，小张一人需要 10 小时”，给了两人的完工时间，（1）赋值总量，8 和 10 的公倍数， $2 \times 4 \times 5 = 40$ 小时。


$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 8} \quad 10 \\ \times 4 \times 5 \\ \hline 40 \end{array}$$

（2）算效率，甲 $= 40/8 = 5$ ，乙 $= 40/10 = 4$ 。（3）根据工作过程列方程，没有问小王或小张的时间，而是问时间差，前面共同工作 3 小时，后面两人合作 1 小时，两人都是工作 $3+1=4$ 小时，多出来的就是“小李因故回了趟家，期间小张一直在工作”部分，整个工作时间 = 两人合作 $(3+1)$ 小时 + 小张一人工作 t 小时，即 $(5+4) \times 4 + 4t = 40$ ，解得 $t=1$ 。说明小张一人做 1 小时，其他时间都是共同工作，则多工作 1 小时。【选 A】

【注意】数学题中有秒杀，但现在考试的激烈程度大了很多，这类题目越来越少，有秒杀的题目老师一定会讲，蒙题的技巧不算是秒杀，比如第 1 题，以坑治坑反而会掉坑，错选 D 项。工程问题是拿分重点，考查多，难度不是很大，是中等难度的题型。

【知识点】给效率比例型：给两个人或多个人的效率关系，按照关系赋值即可。

1. 赋效率（满足比例即可）。

2. 算总量：总量=效率*时间。

3. 根据工作过程列方程或式子。

4. 引例. 甲和乙的效率比为 2: 3，甲、乙合作完成一项工程需要 10 天，如果甲单独做这项工程需要多少天？

A. 15

B. 20

C. 25

D. 30

答：给效率比例关系，给一个时间，不能把总量赋值 10 天，只有一个时间没有公倍数，至少需要两个时间才能求公倍数。给了效率比，从效率入手，从头至尾没有具体的效率，赋值时满足比例关系即可。（1）赋值效率，甲效率为 2，乙效率为 3。（2）算总量，总量=10*（2+3）=50。（3）甲单独做时间=50/2=25 天，对应 C 项。

5. 效率类的问题，考查的题量比给完工时间型问题多很多，例 3~例 6 都是。

【例 3】（2018 四川）甲工程队与乙工程队的效率之比为 4: 5，一项工程由甲工程队先单独做 6 天，再由乙工程队单独做 8 天，最后由甲、乙两个工程队合作 4 天刚好完成，如果这项工程由甲工程队或乙工程队单独完成，则甲工程队所需天数比乙工程队所需天数多多少天？

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【解析】例 3. 读题，发现有效率比，还有好几个时间，“一项工程由甲工程队先单独做 6 天，再由乙工程队单独做 8 天，最后由甲、乙两个工程队合作 4 天刚好完成”，前面求时间的公倍数，必须是完工时间的公倍数，本题的 6 天、8 天都是完成工程一部分的时间，还有一小部分是 4 的倍数，是不能求的。只有单独一次性把工作完成的，才能求公倍数。（1）赋值甲效率为 4，乙效率为 5。（2）总量=4*6+5*8+（4+5）*4=100。（3）甲单独做时间=100/甲=25 天，乙单独做时间=100/乙=20 天，做差=25-20=5 天。【选 C】

【注意】有效率比，优先考虑效率。前面求总量也是为了求效率。

【例 4】(2018 江苏) 某新建农庄有一项绿化工程，交给甲、乙、丙、丁 4 人合作完成。已知 4 人的工作效率之比为 3: 5: 4: 6，甲、乙合作完成所需时间比丙、丁合作多 9 天，则 4 人合作完成工程所需时间是：

- A. 17 天
- B. 18 天
- C. 19 天
- D. 20 天

【解析】例 4. 注意“已知 4 人的工作效率之比为 3: 5: 4: 6”，不是 3: 4: 5: 6，考试的时候出题老师可能会把数据的顺序改一改，要注意防止陷阱。只给一个时间，有效率比优先考虑效率，(1) 赋值甲效率为 3、乙效率为 5、丙效率为 4、丁效率为 6。考试的时候可以直接把 3、5、4、6 标在题干里面。

方法一：没有给总量，只给了“甲、乙合作完成所需时间比丙、丁合作多 9 天”，(2) 可以设总量为 x ，则 $x/(3+5) - x/(4+6) = 9$ 天，解得 $x = 9 \div (1/8 - 1/10) = 9 \div (1/40) = 9 \times 40 = 360$ 。(3) 四人合作时间 $= 360 / (3+5+4+6) = 360 / 18 = 20$ 。

方法二：(2) 有效率，但不知道具体的时间和总量，要么设总量（方法一），要么设时间，时间少的设为 t （丙和丁），则甲和乙的时间为 $t+9$ ，则总量 $= (3+5) * (t+9) = (4+6) t$ ， $8 * (t+9) = 10 * t$ ，解得 $t = 8 * 9 / 2 = 36$ ，则总量 $= 10t = 360$ 。注意这里计算的时间 36 是丙和丁的时间，还要算总量。(3) 合作时间 $= 360 / (3+5+4+6) = 20$ 天。【选 D】

【注意】1. 第一种思路，设总量为 x ，解分数方程，计算虽然计算麻烦一点，但是思维比较简单。第二种思路，需要先计算 t ，再算总量，虽然没有通分过程，但是求的反而麻烦了，老师建议大家用第一种方法，方程比较直白，解得 x 直接可以用。

2. 两种方法，选择一种重点掌握，另外一种了解即可。

3. 通常工程问题三步中，总有一步是难度比较高的，前面三道最后一步难度比较高，本题第二步难度比较高。

【例 5】(2017 北京) 某检修工作由李和王二人负责，两人如一同工作 4 天，剩下工作量李需要 6 天，或王需要 3 天完成。现李和王共同工作了 5 天，则剩下

的工作李单独检修还需几天完成？

- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

【解析】例 5. 本题的题型前两年出现比较少，是近两年新的趋势。“两人如一同工作 4 天”，前面工作 4 天的工作量是确定的，则剩下的工作量也是确定的。“剩下工作量李需要 6 天，或王需要 3 天完成”，说明小李效率*6=小王效率*3，小李效率/小王效率=3/6=1/2（时间的反比）。（1）赋值小李的效率为 1，小王的效率为 2。（2）工作总量=(1+2)*4+1*6=18。（3）设小李单独做的时间为 t，(1+2)*5+1*t=18，解得 t=3。【选 B】

【注意】1. 出现同样的工作，交给两人做，分别需要 xx 天，或者甲做几天，相当于乙做几天；甲做几天或乙做几天可以做完，就可以算出两人的效率比。

2. 本题的难点是第一步，效率比是隐藏的。

【答案汇总】1-5：AACDB

【例 6】（2018 辽宁）某工程 50 人进行施工。如连续施工 20 天，每天工作 10 小时，正好按期完成。但施工过程中遭遇原料短缺，有 5 天时间无法施工。工期还剩 8 天时，工程队增派 15 人并加班施工。若工程队想按期完成，则平均每天需工作多少小时？

- A. 12.5
B. 11
C. 13.5
D. 11.5

【解析】例 6. “正好按期完成”，则时间就是 20 天。20 天是时间，10 小时也是时间，由于不是 24 小时都工作，一天可能工作 10 小时，也可能工作 8 小时，因此“每天工作 10 小时”是用来修饰“连续施工 20 天”的，其实只知道人数和天数，不是给定完工时间型工程问题，不能直接赋值总量为 20。（1）设每人每单位时间效率为 1，单位时间就是小的不可分割的时间，即每人每小时效率为 1。（2）总量=50*20*10*1=10000（数据比较好算可以算出来，遇到数据不好算的，比如 58*24*13，不要计算，写乘法形式，后面可以约分）。

方法一：（3）没有说哪 5 天无法施工，设最前面的 5 天，还有 15 天正常干

活，最后的 8 天加班，则还有 7 天是正常工作的。设加班时间为 t ，停工的工作量为 0，正常工作量 $= 7 \times 50 \times 10$ ，8 天加班工作量 $= 8 \times 65 \times t$ ，总量 $= 0 + 7 \times 50 \times 10 + 8 \times 65 \times t = 10000$ ， $65 \times 8t = 6500$ ， $8t = 100$ ， $t = 12.5$ （资料分析中， $1/8 = 12.5\%$ ），对应 A 项。

$$0 + (7 \text{天} \times 50 \text{人} \times 10) + 8 \text{天} \times 65 \text{人} \times t_{\text{加班}} = 10000$$

方法二：出现按期完成这种问题，有快速解法。要求按期完成，则 8 天加班的工作量 $= 8$ 天正常的工作量 $+ 前面 5$ 天无法施工少干的工作量，即 8 天加班的工作量 $= 正常工作 13$ 天的工作量，则 $8 \times 65 \times t = 13 \times 50 \times 10$ ，约分变为 $8t = 100$ ，解得 $t = 12.5$ 。【选 A】

【注意】1. 遇到 N 名工人、 N 台机器等表述，一般默认每人效率相等，常设为 1。单位 1 个人效率为 1。

2. 方法一，无论条件怎么变动，都一定可以做，是通法，但是缺点是数据比较多，计算量大。

3. 方法二，抓住最后工作的时间等于平时的多少时间，一步出答案。是考试比较热门的考法，遇到几天停工，不能干活，后面加班补回来的情况，可以考虑这种思路。

【知识点】给具体单位型：出现具体量，比如 xx 吨/米/页/个，可能是效率，也可能是总量。此时不能赋值，比如有具体的吨数，赋值 100 吨，计算结果是 1000 吨，会出现矛盾，因此不能赋值，只能设未知数。本质就是披上工程外衣的方程法。

1. 设未知数（设小不设大或设中间量）。
2. 找等量关系列方程。

【例 7】（2018 北京）甲、乙两人生产零件，甲的任务量是乙的 2 倍，甲每天生产 200 个零件，乙每天生产 150 个零件，甲完成任务的时间比乙多 2 天，则

乙的工作量+丙的工作量=150, $8*10+10*x=150$, 解得 $x=7$, 对应 D 项。

4. 此类题目通常有猜题的小技巧: 丙去帮忙, 肯定会多帮干的慢的人, 少帮干的快的人, 第二项工程是乙负责, 乙的效率是 8, 比较慢, 则丙多帮慢的, 丙总共干 10 天, 帮乙的时间一定大于 10 天的一半 5 天, 可以排除 A、B 项, 再代入验证, 比如代入 6 天, 丙在第二项工作中工作 6 天, 乙工作 10 天, 工作量加和不等 150, 排除。

【例 8】(2015 广东) 有两箱数量相同的文件需要整理。小张单独整理好一箱文件要用 4.5 小时, 小钱要用 9 小时, 小周要用 3 小时。小周和小张一起整理第一箱文件, 小钱同时开始整理第二箱文件。一段时间后, 小周又转去和小钱一起整理第二箱文件, 最后两箱文件同时整理完毕。则小周和小张、小钱一起整理文件的时间分别是:

A. 1 小时, 2 小时

B. 1.5 小时, 1.5 小时

C. 2 小时, 1 小时

D. 1.2 小时, 1.8 小时

【解析】例 8. 两箱是一样的, 计算一箱的量, 可以知道另一箱的量。给三个完工时间, (1) 设总量为 3、4.5、9 的公倍数, 9 是 3 的 3 倍, 是 4.5 的 2 倍, 三个数中有 1 个数是别人的倍数, 则公倍数就是它自己, 因此赋值总量每一箱的量为 9。(2) 算效率, 小张=2, 小钱=1, 小周=3。(3) 小周是帮忙的, 小张负责第一箱, 小钱负责第二箱, 总时间=总量/三人效率和= $(9+9)/(2+1+3)=3$ 小时。也可以看选项, 问小周和二人一起的时间分别是多少, 选项加和都是 3, 可以猜到总时间就是 3。只要求出帮一个人的时间, 总时间是 3 小时, 帮另一个人的时间做减法即可。分析小周和小张那一项, 设小周帮小张时间为 t , 总量 $9=3*t+2*3$, 解得 $t=1$, 小周帮小张 1 小时, 只有 A 项满足。【选 A】

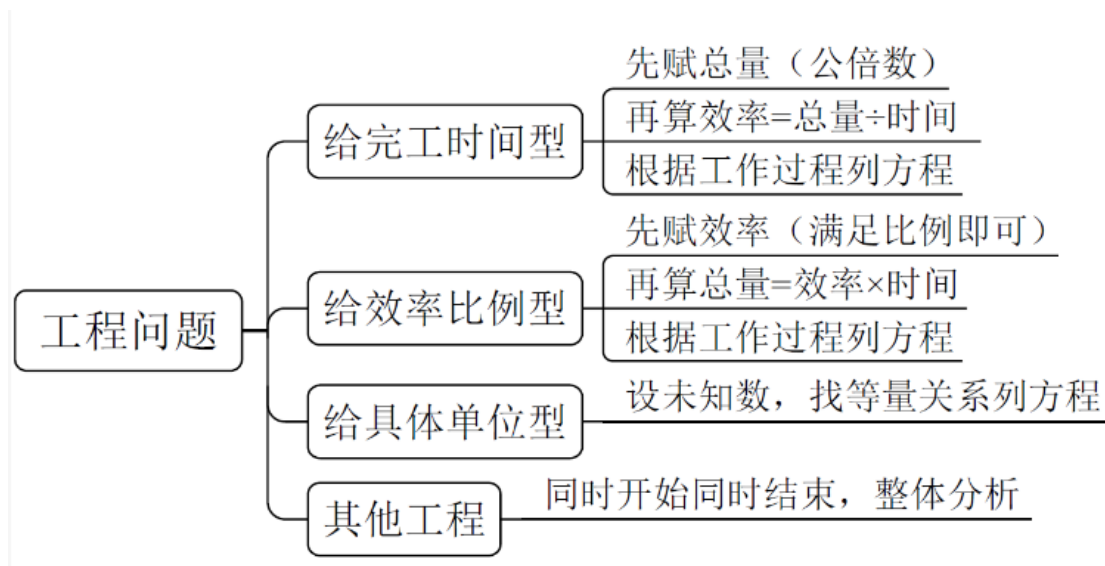
【注意】1. 如果不能理解第三步如何分析, 可以代入计算, 通过工作量加和为 9 验证。

2. 猜题小技巧: 小张和小钱单独负责一箱, 小张 4.5 小时, 小钱 9 小时, 则小周多帮干得慢的小钱, 因此选项第一个时间需要小于第二个时间, 排除 B、C 项, 再代入 A、D 项中的某一项验证。

3. 猜题: 选项中只有其中两个选项是反的——A、C 项是反的, 这种题目最

容易出现的错误是小张和小钱搞反了，因此答案多半是在 A、C 项中，可以利用这一点，结合猜题小技巧，可以直接选 A 项。这个思路不严谨，但概率比较大。

【答案汇总】6-8: ABA



【小结】工程问题：

1. 给完工时间型：题目给多个完成工作的时间，不是给时间就可以，一定是完工时间。如果给 3 小时做其中一部分不是完工时间。

(1) 根据时间赋总量 (公倍数)。不一定是最小公倍数，但不要赋值特别大，特别难算的数。

(2) 再算效率=总量/时间。

(3) 根据工作过程列方程。

2. 给效率比例型：国考工程问题通常会有 1~2 个，是高频 (必考) 的考点。

(1) 先赋效率 (满足比例即可)。题目中有时间有效率，优先考虑赋值效率。可能会直接给效率，如甲：乙=3：4，有的时候比例是暗示，如甲 3 天内的工作量=乙 4 天的工作量，要读出来。

(2) 再算总量=效率*时间。

(3) 根据工作过程列方程。

3. 给具体单位型：不能随便赋值，设未知数，找等量关系列方程。严格讲是不能赋值的，可能会和具体量冲突，但是可以赋值份数，比如甲 20 小时完成，

乙 30 小时完成，甲每小时比乙多做 5 个零件。出现具体的 5 个零件，不能赋值，可以设总量为 60 份或者 $60x$ ，给具体单位型，如果前面条件让人想到赋值，可以赋值份数或者 x ，但不要赋值 60，这样可以更快一点。

4. 其他工程：同时开始同时结束，整体分析。

5. 还有牛吃草问题：是工程问题的延伸，属于资源在不断增长的工程问题，草地类似工程量，牛类似为人，草地在不断的长，是广义的工程问题，国考近 5 年没有考过，因此方法精讲课没有放，想学的同学可以在学霸课、1 元或 0 元的宣传课、模考大赛（如果出现老师会讲）中听。重点是掌握老师讲的题目。

第五节 行程问题

【知识点】行程问题：

1. 三量关系：路程=速度*时间（ $S=V*T$ ）。

2. 考查题型：

（1）基础行程：研究一个人的行程。

（2）相对行程：研究两个人，两个主体是相遇、追及或者船是顺流还是逆流。

（3）比例行程：从比例的角度思考，不是侧重计算，而是侧重什么时候是反比，什么时候是正比。

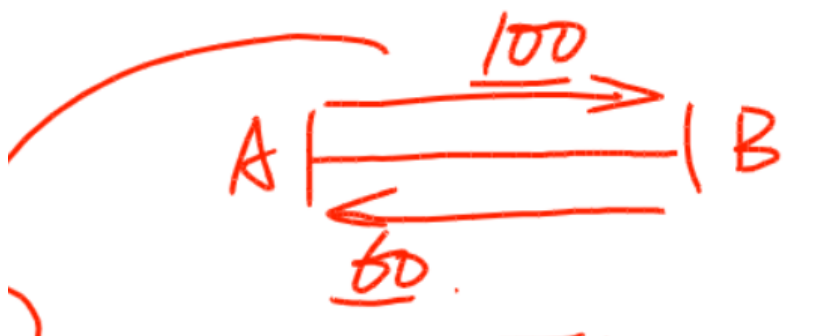
一、基础行程

【知识点】基础行程：

1. 基本公式考查：路程=速度*时间。

2. 等距离平均速度：

（1）平均速度定义：平均速度=总路程/总时间。假如 A 到 B 速度是 100，B 到 A 速度是 60，平均速度= $\frac{2*V_1*V_2}{V_1+V_2}$ =75，而不是 80。来回路程是一样的，假如去的时候只要 3 分钟，回来的时候需要 5 分钟，一大半部分在速度慢点的路程，则平均速度更靠近速度 60 这一边，平均速度肯定不是两个速度加起来除 2。



(2) 公式: $\bar{V} = 2 * V_1 * V_2 / (V_1 + V_2)$ 。 $\bar{V} = S_{\text{总}} / t_{\text{总}} = (S + S) / (S/V_1 + S/V_2) = 2 * V_1 * V_2 / (V_1 + V_2)$ 。记忆方法: 两倍乘积/和。

(3) 适用于:

① 直线往返: 去的时候速度为 V_1 , 回来的时候速度为 V_2 。



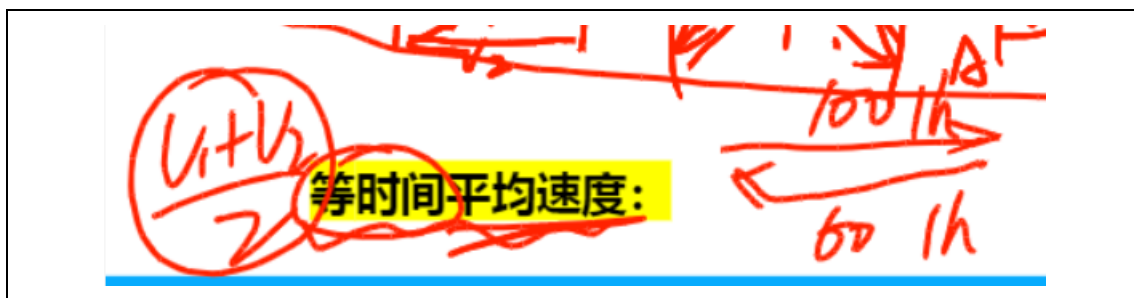
② 上下坡往返: 原来上坡, 回去是下坡, 原来下坡, 回去是上坡, 相同的路程来回各走一遍。



③ 等距离两段: 从 A 点到 B 点, 有一个中点, 前面速度为 V_1 , 后面速度为 V_2 , 如果 V_1 和 V_2 对应的路程是一样的, 就是等距离平均速度问题。



(4) 等时间平均速度: 如果从甲地到乙地花费了 1 小时, 平均速度为 100; 从乙地到甲地, 走小路花了一个小时就到了, 平均速度是 60。两个过程时间是一样的, 则整个过程平均速度 = $(V_1 + V_2) / 2 = 80$, 考试不会这样出。



【例 1】(2015 江苏) 一列火车途经两个隧道和一座桥梁，第一个隧道长 600 米，火车通过用时 18 秒；第二个隧道长 480 米，火车通过用时 15 秒；桥梁长 800 米，火车通过时速度为原来的一半，则火车通过桥梁所需的时间为：

- A. 20 秒
- B. 25 秒
- C. 40 秒
- D. 46 秒

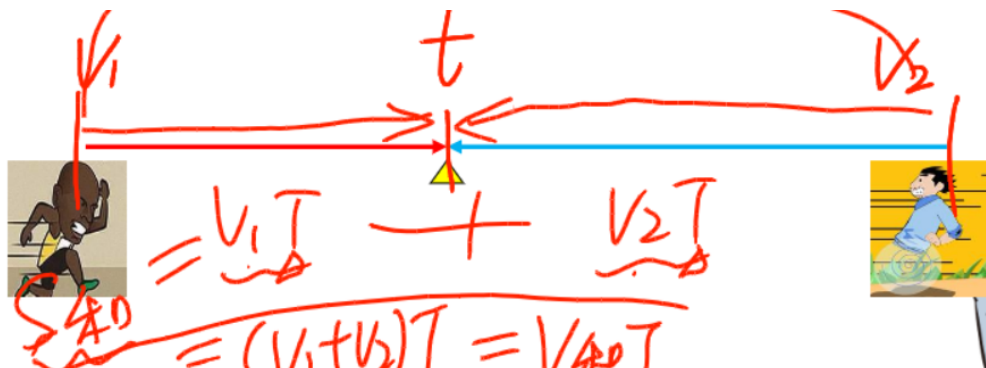
【解析】例 1. 火车过桥或者过隧道，通过的时间=（车长+桥长）/火车速度。
依题意，通过第一个隧道：600+S_车=18*V_车；通过第二个隧道：480+S_车=15*V_车。
两个方程进行比较，3*V_车=40，解得 V_车=40，S_车=120。通过桥梁：速度变为原来的一半，即为 20，桥梁长度为 800，列式：800+120=20*t，解得 t=92/2=46，对应 D 项。【选 D】

【注意】1. 火车过桥或者过隧道，通过的时间=（车长+桥长）/火车速度，可以自己画个图分析。如下图，火车上桥，到车尾出桥才结束，要么从车头到车头分析，要么从车尾到车尾分析，会发现有两段长度，S=车长+桥长。



2. 猜题并不是每次都能猜中，如果根据速度变为原来的一半，猜 C 项，就做错了，猜题有风险。

2. 如下图，假如运动员的速度为 v_1 ，老师的速度为 V_2 ，在中间相遇，时间为 t ，运动员跑的路程为 V_1*t ，老师跑的路程为 V_2*t ，两个人同时开始跑， $S_{和} = V_1*t + V_2*t = (V_1 + V_2) * t = V_{和} * t$ 。



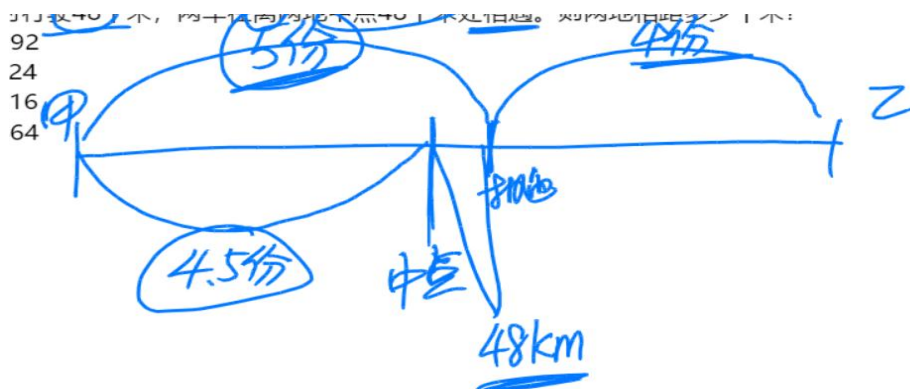
【例 1】（2016 广东）两辆汽车同时从两地相向开出，甲车每小时行驶 60 千米，乙车每小时行驶 48 千米，两车在离两地中点 48 千米处相遇。则两地相距多少千米？

- A. 192 B. 224
C. 416 D. 864

【解析】例 1. 方法一：看到相遇，想到相遇公式： $S_{和} = V_{和} * T$ 。依题意， $S = (V_1 + V_2) * t = (60 + 48) * t$ 。两车在离两地中点 48 千米处相遇，甲的速度快，甲的路程比一半多 48 千米，列式： $S_{甲} = 60 * t = 108 * t / 2 + 48$ ，解得 $t = 48 / 6 = 8$ 小时， $S = 108 * 8 = 864$ ，对应 D 项。也可以根据乙走一半路程不到，列式： $S_{乙} = 108 * t / 2 - 48$ 。

方法二： $S_{和} = V_{和} * T = 108 * t$ ，如果 t 是整数， S 是 108 的倍数，只有 D 项是 108 的倍数，直接选 D 项，理论上不严谨，考场上优先把 D 项圈出来，如果后面的题目都不会做，再代入 D 项，验证一下。

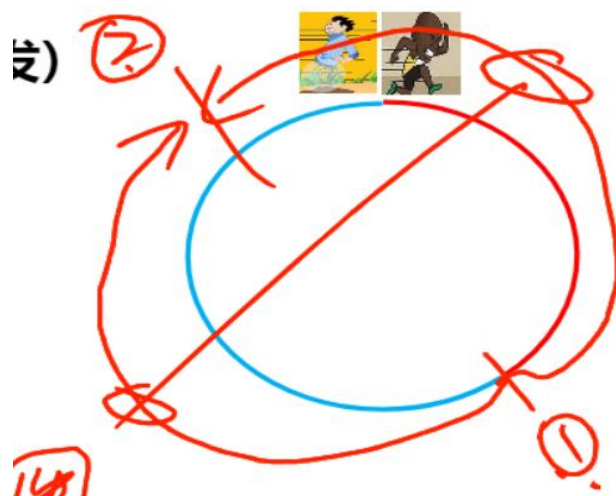
方法三：比例行程思维。两个人在相遇过程中，时间是一样的，两个人的路程之比为速度之比， V 越大， S 越大， $V_{甲} / V_{乙} = 60 / 48 = 5 / 4$ ，相遇的时候，甲走了 5 份路程，乙走了 4 份路程，两车在离两地中点 48 千米处相遇，中点为 4.5 份的位置，中点和相遇的地方差了 0.5 份，0.5 份对应 48 千米，1 份对应 96 千米，总共有 9 份， $9 * 96 = 864$ ，对应 D 项。【选 D】



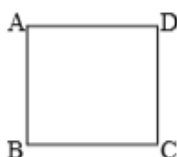
【知识点】环形相遇（同点反向出发）：一个图形只要是首尾相连就是环形，如长方形、正方形、圆形等。

1. 公式： $S_{\text{和}} = V_{\text{和}} \times T_{\text{遇}}$ 。

2. 如图，相遇 1 次， $S_{\text{和}} = 1$ 圈；第一次相遇到第二次相遇共走了 1 圈，第一次相遇共走了 1 圈，则相遇 2 次， $S_{\text{和}} = 2$ 圈；相遇 N 次，每一次相遇，都需要合走 N 圈，即 $S_{\text{和}} = N$ 圈。



【例 2】（2017 云南）如图，正方形的迷你轨道边长为 1 米，1 号电子机器人从点 A 以 1 米/秒的速度顺时针绕轨道移动，2 号电子机器人从点 A 以 3 米/秒的速度逆时针绕轨道移动，则它们的第 2017 次相遇在：



A. 点 A

B. 点 C

C. 点 B

D. 点 D

【解析】例 2. 正方形每边都是 1 米，1 号从点 A 以 1 米/秒的速度移动，2 号从点 A 以 3 米/秒的速度逆时针移动。

方法一：行程的思维。多次相遇问题，正方形是首尾相连，是环形相遇，相遇 N 次， $S_{和}=N$ 圈。2017*4 = (1+3) * T，解得 T=2017 秒，走了 2017 秒，1 号比较好算，1 号走了 1 米/秒*2017 秒=2017 米，每 4 秒回来一次，2017 米=504*4 米+1 米，最后走了 1 米，即到了 D 点，对应 D 项。

方法二：周期的思维。1 号速度为 1 米/秒，2 号速度为 3 米/秒，第一次相遇为 D 点，第二次相遇为 C 项，第三次相遇为 B 点，第四次相遇为 A 项，即按照 D 点、C 点、B 点、A 点不断循环，2017=4*504+1，循环 504 次后的第一次，504 次循环结束为 A 点，再走一次，为 D 点，对应 D 项。【选 D】

【知识点】直接追及：同时同向而行。

1. 公式： $S_{差}=V_{差}*T_{追}$ ，同时同向出发，两个人起点不同，后面的运动员速度大为 $V_{大}$ ，前面的人唐宋老师速度小为 $V_{小}$ ，在某一点相遇，时间为 T ，蓝色的线是唐宋老师跑的路程，红色的线是运动员跑的路程， $S_{差}=V_{大}*T-V_{小}*T=(V_{大}-V_{小})*T=V_{差}*T$ 。



2. $S_{差}$ ：追及刚开始时两人相差的距离。

3. 例：假设唐宋老师速度是 8 米/秒，先跑 30 秒，运动员是 10 米/秒，问运动员多长时间能追上唐宋老师？

答：先算 $S_{差}$ ，刚开始两人的距离，先跑 30 秒，先跑了 $8*30=240$ 米， $S_{差}=240=$

$(10-8) \cdot t$ ，解得 $t=120$ 秒，120 秒就追上了唐宋老师。

【例 3】(2018 深圳) 清晨，爷爷、爸爸和小磊在同一条笔直跑道上朝同一方向匀速晨跑，某一时刻，爷爷在前，爸爸在中，小磊在后，且三人之间的间距正好相等。跑了 12 分钟后小磊追上了爸爸，又跑了 6 分钟后小磊追上了爷爷，则再过多少分钟，爸爸可追上爷爷？

A. 12

B. 15

C. 18

D. 36

【解析】例 3. 画图分析，假设往右边跑，爷爷在最前边，爸爸在中间，小磊在最后边，间距相等均为 S ，跑了 12 分钟后小磊追上了爸爸，追及问题， $S=12 \text{ 分} \cdot (V_{\text{小}}-V_{\text{爸}})$ ；又跑了 6 分钟后小磊追上了爷爷，从初始状态到追上爷爷，需要 12+6 分钟， $2S=(12+6) \cdot (V_{\text{小}}-V_{\text{爷}})$ 。问的是再过多长时间，爸爸追上爷爷，列式： $S=t_{\text{追}} \cdot (V_{\text{爸}}-V_{\text{爷}})$ 。题目有 3 个追及过程，看清楚是谁追谁，小孩追爸爸是一个 S ，爸爸追爷爷也是一个 S ，小孩追爷爷是两个 S 。不能把中间的算式 $2S=(12+6) \text{ 分} \cdot (V_{\text{小}}-V_{\text{爷}})$ ，当成 1 个 S 和 6 分钟来计算，当小孩追上爸爸时，小孩和爷爷的距离不一定为 S ，不知道俩人的距离为多少，只能回到最初始状态下，追及问题都是分析最开始的时间，追及过程中两个人距离是不断变化的，要分析追及过程中某个时间点的距离非常难算，所以回到刚开始追及的时候，比较好算，距离差为 $2S$ 。目标是算 $t_{\text{追}}$ ， S 未知， $V_{\text{爸}}-V_{\text{爷}}$ 也未知，需要利用前面的算式解，整个题目没有 S ，全部都是时间，类似工程问题给完工时间型，给 S 进行赋值， $S=12 \text{ 分} \cdot (V_{\text{小}}-V_{\text{爸}})$ ， $S=9 \text{ 分} \cdot (V_{\text{小}}-V_{\text{爷}})$ ， S 是 9 和 12 的倍数，赋值 $S=36$ ，那么 $V_{\text{小}}-V_{\text{爸}}=3$ ①； $V_{\text{小}}-V_{\text{爷}}=4$ ②，②-①，推出 $V_{\text{爸}}-V_{\text{爷}}=4-3=1$ ，那么 $36=t_{\text{追}} \cdot 1$ ，解得 $t_{\text{追}}=36$ 分钟。有的同学算出 36 就直接选择了 D 项，D 项是错误的，看清楚问题，问的是再过多少分钟，36 分钟是最初始的状态到追上爷爷的时间，需要用 $36-12-6=18$ 分钟，对应 C 项。【选 C】

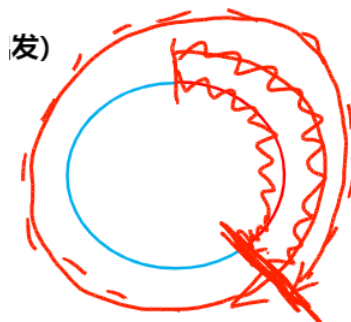
$$\begin{cases}
 S = 12 \text{分} \times (V_{\text{小}} - V_{\text{大}}) \\
 2S = (12+6) \text{分} \times (V_{\text{小}} - V_{\text{大}}) \\
 S = T_{\text{追}} \times (V_{\text{大}} - V_{\text{小}})
 \end{cases}$$

【注意】1. 看选项，C、D 项正好差 18，有可能 D 项是忘记减 18 的结果，选 C 项。

2. 本题易错点是“再过”，难点是“回到初始状态”，不容易想到的是“赋值”。

【知识点】环形追及：同点同向出发。直线题目更难，环形题目一般能直接套公式。

1. 如图所示，环形追及，同一个点同向出发，才会出现一个人特别慢，一个人跑的特别快这种情况。例如唐宋老师和运动员，运动员从背后超过唐宋老师，比唐宋老师多跑了一圈。追上两次，就差 2 圈，追上 N 次，就差 N 圈。



2. 公式： $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} \times T_{\text{追}}$ ，追上 1 次， $S_{\text{差}} = 1$ 圈，追上 N 次， $S_{\text{差}} = N$ 圈。

3. 例：环形上两人同一点出发，甲追上乙三次，可以得出： $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = 3$ 圈。

【例 4】（2017 广东）老林和小陈绕着周长为 720 米的小花园匀速散步，小陈比老林速度快。若两人同时从某一起点同向出发，则每隔 18 分钟相遇一次；若两人同时从某一起点相反方向出发，则每隔 6 分钟相遇一次。由此可知，小陈绕小花园散步一圈需要多少分钟？

A. 6

B. 9

C. 15

D. 18

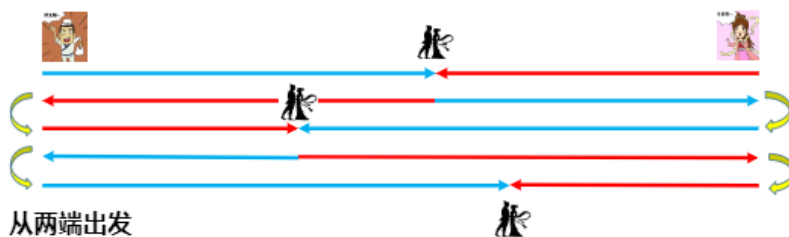
【解析】例 4. 俩人同时同向出发，追及问题。每隔 18 分钟相遇一次，注意这里的相遇是追及，“相遇”广义上包括两种：一种是迎面相遇，面对面相遇，就是数学中的相遇， $S_{和}=V_{和}*T$ ，还有一种是背后相遇，是理解为追及， $S_{差}=V_{差}*T$ 。做题的时候判断是相遇还是追及时，以方向为准。说“同向”就是追及，说“反向”就是相遇。18 分钟追一次，即 $S_{差}=720$ 米（一圈）= $V_{差}*T=V_{差}*18$ 分①；反向出发，6 分钟相遇一次，反向是相遇， $S_{和}=720$ 米（一圈）= $V_{和}*T=V_{和}*6$ 分②。解得 $V_{差}=40$ ， $V_{和}=120$ 。小陈的速度比老林快，小陈的速度是稍微大的， $V_{陈}=(V_{差}+V_{和})/2=80$ （已知两数之和和两数之差，和差相加把小的速度抵消了，剩下了 2 个 $V_{大}$ ，再除以 2 就是一个 $V_{大}$ 的速度。这种方法，已知和差的速度，求大速度和小速度，都可以这么求，和差相加除以 2 是大速度，和差相减除以 2 是小速度）。 $t_{陈}=720/80=9$ 分钟，对应 B 项。【选 B】

【注意】考场上快速做题小技巧：已知正常迎面相遇是 6 分钟，问小陈自己绕一圈是多长时间，相遇需要 6 分钟，小陈速度快，小陈走大半圈，老林走小半圈，小陈现在走一圈，把剩余的小半圈走完，走大半圈用 6 分钟，剩余的小半圈用的时间肯定小于 6 分钟，小陈走一圈的时间是大于 6 分钟，小于 12 分钟，排除 A、C、D 项，对应 B 项。

【知识点】多次迎面相遇（两端出发）：在直线上。

1. 例：牛郎、织女七夕相会，相遇时没有认出来，继续往前走，到对方家中再返回来，再次相遇，不断的往返相遇，属于多次相遇问题。分析相遇过程，第一次迎面相遇，合起来走了 1 个全程，第二次相遇，走了 3 个全程。每相遇一次，多走了 2 个全程，不断的加 2，从 1 开始，不断的是奇数，也就是 $2n-1$ 个全程。

多次迎面相遇（两端出发）



【解析】例 6. 读题，上面描述的是轮船，下面描述的是汽艇，换船了，前面的船速是不能用的，只能用前面的水速。已知汽艇在静水中的速度是 20 千米/小时，说明 $V_{\text{汽船}}=20$ 千米/小时。 $V_{\text{水}}=(26-18)/2=4$ 千米/小时，汽艇往返是一顺一逆， $V_{\text{汽顺}}=20+4=24$ ， $V_{\text{汽逆}}=20-4=16$ ， $t=240/24+240/16=10+15=25$ 小时，对应 D 项。【选 D】

【注意】船在水中的运动，现在有一种类似考法，人在扶梯上，出现也是照葫芦画瓢去做即可，也类似船在水中，把人看成船，扶梯看成水，如果扶梯往前走，人也往前走，速度更快，如果扶梯往前走，人往后走，速度更慢。

【答案汇总】1-5: DDCBB; 6: D

三、比例行程

【知识点】比例行程：研究三量之间是反比还是正比，研究的时候有一个量是定值，不变的，三量关系：路程=速度*时间。

1. 路程一定，速度与时间成反比（难度高）。

2. 速度一定，路程与时间成正比（容易）。

3. 时间一定，路程与速度成正比（容易）。

4. 例：2016 年的一道联考题，甲是早上 8 点出发，10 点到达乙这边，乙是 8 点 20 出发，9 点 50 到达甲这边，走的路程相同，问 $V_{\text{甲}}/V_{\text{乙}}=?$

答：同样的路程，甲走一遍，乙走一遍，甲的时间是 120 分钟，乙是 90 分钟，时间之比是 120: 90，速度之比是 90: 120=3: 4，这种题目考场上是送分题，一定要做。

5. 题目有大量时间出现，往往考虑用比例来思考。

【例 1】（2018 山东）小张和小王 18: 00 分别从甲、乙两地同时出发，沿相同道路匀速相向而行。18: 20 小张到达丙地停留，18: 40 两人在丙地碰面并均以出发时速度继续行进。18: 50 小王到达甲地，问小张在几点到达乙地？

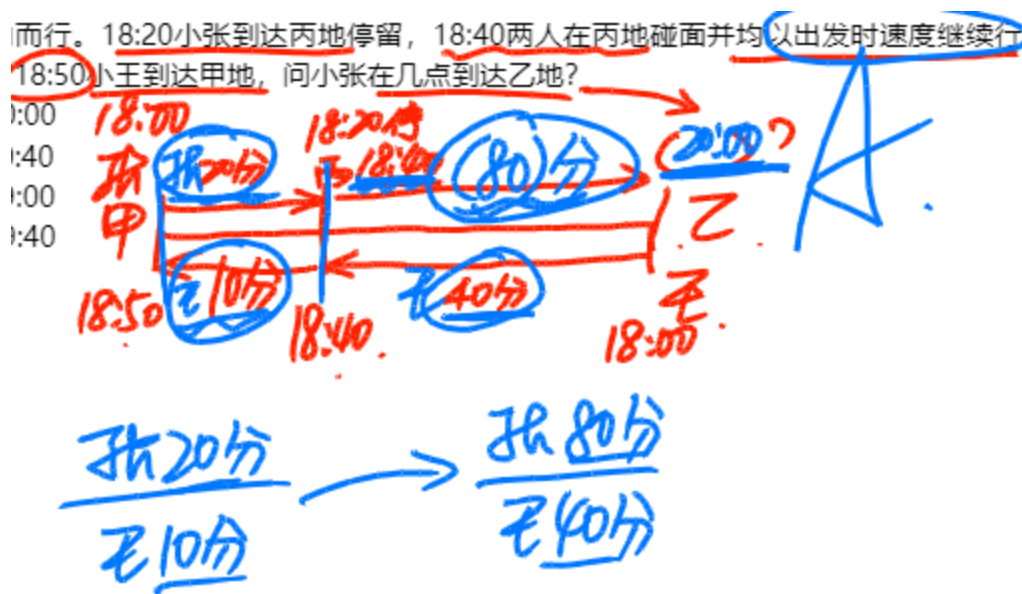
A. 20: 00

B. 20: 40

C. 19: 00

D. 19: 40

【解析】例 1. 读题，同时出发，相向而行，18:20 小张到达丙地停留，18:40 两人在丙地碰面并均以出发时速度继续行进，18:50 小王到达甲地，问小张在几点到达乙地，这道题目时间很多，画图的时候建议一个人在上面走，一个在下面走，这样看起来比较清晰。小张 18 点出发，18:20 到达丙地，甲丙这段路程走了 20 分钟。18:40 两人在丙地碰面，说明小王走到丙地用了 40 分钟，小张 18:40 从丙出发往乙地走，小王是 18:50 到达甲，发现甲丙这段路程两个人都走过，而且时间还已知，路程一定，速度和时间成反比，小张走甲丙用 20 分钟，小王走甲丙用 10 分钟，同样的比例放大，小王走丙乙要 40 分钟，说明小张走丙乙要 80 分钟，18:40 再过 80 分钟，20 点到达乙地，对应 A 项。【选 A】



【例 2】（2019 北京）小王和小张分别于早上 8:00 和 8:30 从甲地出发，匀速骑摩托车前往乙地。10:00 小王到达两地的中点丙地，此时小张距丙地尚有 5 千米。11:00 时小张追上小王。则甲、乙两地相距多少千米？

- A. 50
- B. 75
- C. 90
- D. 100

【解析】例 2. 小王和小张都从甲地出发，同地出发，画图时一个人画到上面一个人画到下面。10 点小王到达中点丙，此时小张距离丙地还有 5km，11 点小张追上小王，说明小张速度比小王快，假设在某一点追上，问甲乙两地相距多少千米，这道题比上面的题目要难一些，不是两端出发，俩人不是同一个时间出

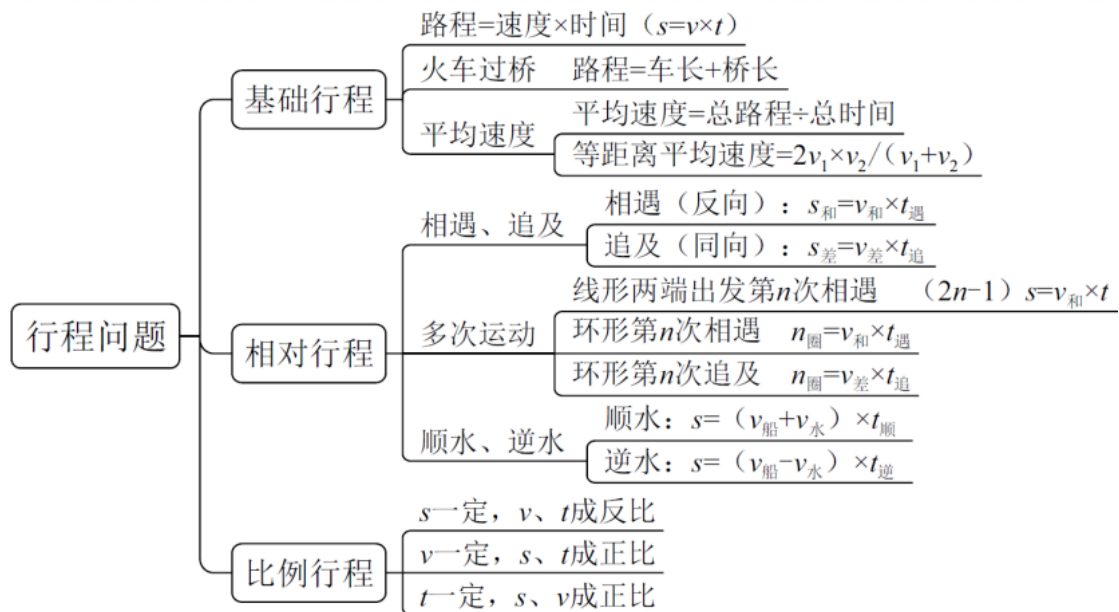
发，找俩人都走过的路程，时间和起点又很清楚的部分。发现从起点到相遇这段路程相同，时间均已知，路程相同，速度和时间成反比， $V_{\text{王}}/V_{\text{张}}=2.5/3=5/6$ 。上一道题全部都是时间问的也是时间，只分析时间即可，这道题问的是路程，需要把速度算出来才能算出路程。有比例，求具体路程，设未知数，设小王速度为 $5V$ ，小张速度为 $6V$ ，小王花 2 个小时走的路程与小张花 1 个半小时走的路程差 5km，列式： $5V \times 2 \text{ 小时} = 6V \times 1.5 \text{ 小时} + 5\text{km}$ ，解得 $V=5\text{km/h}$ 。小王 4 小时走完全程， $S=4 \times 5V=4 \times 25=100$ ，对应 D 项。【选 D】

【例2】(2019北京)小王和小张分别于早上8:00和8:30从甲地出发，匀速骑摩托车前往乙地。10:00小王到达两地的中点丙地，此时小张距丙地尚有5千米。11:00时小张追上小王。则甲、乙两地相距多少千米？
A.50
B.75
C.90
D.100

$\Rightarrow 5V \cdot 2\text{小时} = 6V \cdot 1.5\text{小时} + 5\text{km}$
 $\Rightarrow V = 5\text{km/h}$
 $\Rightarrow \text{王4小时走完全程} \Rightarrow S = 4 \times 5V = 100$

【注意】这道题出法上很创新，是追及问题，但并不是用追及公式来做题，追及公式做的题一般都是从不同的地点出发，这道题有小张追小王，但是同一个地点出发，不能用追及公式，只能用比例来做，跑相同的路程，速度和时间成反比，根据速度比设速度为 $5V$ 和 $6V$ ，还有 5km 的路程差来列等式，求出 V ，进而算出 S ，这道题目在 2019 年北京考过之后，在 2019 年联考又考了一遍，联考和国考是不断相互借鉴的，因此这道题目很有可能出现在大家下一次考试的卷子上，要重点看一下。

【答案汇总】1-2: AD



【小结】行程问题：

1. 基础行程：最简单的部分。

- (1) 路程=速度*时间 ($S=V*t$)。
- (2) 火车过桥：路程=车长+桥长。
- (3) 平均速度：平均速度=总路程/总时间；等距离平均速度= $(2V_1*V_2)/(V_1+V_2)$ 。

2. 相对行程：考的最多，不是很难。

(1) 相遇、追及：“遇”就用 $V_{和}$ 算，“追”就用 $V_{差}$ 算。

①相遇（反向）： $S_{和}=V_{和}*t_{遇}$ 。

②追及（同向）： $S_{差}=V_{差}*t_{追}$ 。

(2) 多次运动：

①线性两端出发第 n 次相遇： $(2n-1)*s=V_{和}*t$ （2 次相遇 3 个全程，3 次相遇 5 个全程）。同端出发考的很少，若为同端出发，为 $2n*s=V_{和}*t$ （第一次相遇 2 个全程，偶数个全程）。

②环形第 n 次相遇： $n_{圈}=V_{和}*t_{遇}$ 。

③环形第 n 次追及： $n_{圈}=V_{差}*t_{追}$ 。

(3) 顺水、逆水：顺水： $S=(v_{船}+v_{水})*t_{顺}$ ；逆水： $S=(v_{船}-v_{水})*t_{逆}$ 。

3. 比例行程：考的比较难。 s 一定， v 、 t 成反比（反比用的最多，正比用的少，比较好理解）； v 一定， s 、 t 成正比； t 一定， s 、 v 成正比。

练习一（2018 浙江）甲、乙各自驾驶汽车匀速相向行驶，且同时进入双向公路隧道的两端，30 秒后两车相遇。甲车继续行驶 20 秒到达隧道出口时，乙车距离出口还有 200 米。问隧道的长度为多少米？

- A. 450
B. 500
C. 600
D. 800

【解析】练习一. 正确率 61%，30s 后两车相遇，隧道长度=30* $V_{和}$ 。之前的题目涉及到的是火车，因为火车很长，必须要考虑火车长度，本题是汽车，不需要考虑车的长度，隧道长度是 3 的倍数，排除 B、D 项。剩余 A、C 项，优先代入整百的数字，600=30* $V_{和}$ ， $V_{和}$ =20，600=50* $V_{甲}$ ， $V_{甲}$ =12，那么 $V_{乙}$ =8。验证：乙走 50s+200 米=全长，8*50+200=600，满足，正确。【选 C】

【注意】如果代入 A 项，验证加和时不等于 450，错误。

练习二（2018 国考）工程队接到一项工程，投入 80 台挖掘机。如连续施工 30 天，每天工作 10 小时，正好按期完成。但施工过程中遭遇大暴雨，有 10 天时间无法施工。工期还剩 8 天时，工程队增派 70 台挖掘机并加班施工。问工程队若想按期完成，平均每天需多工作多少个小时？

- A. 1.5
B. 2
C. 2.5
D. 3

【解析】练习二. 问的是平均每天多工作多少个小时，剩余 8 天加班的目的是把正常 8 天和 10 天无法施工的都补上，设剩余 8 天每天工作 t 小时，列式：150 台* t *8=80 台*18 天*10 小时，约分，解得 $t=180/15=12$ 小时，多工作 12-10=2 小时，对应 B 项。【选 B】

【注意】1. 种一棵树最好的时间是十年前，其次是现在。

2. 预习范围：第六节经济利润问题、第七节最值问题。

3. 预习要求：原则上要做完每个章节至少 50% 的题目。实在不会做的话，对每节前几题要有充分的思考，熟悉题型和题意。

4. 数学需要一定基础，基础好事半功倍，但是不是说基础不好就不学了。一

味地后悔考公务员很费劲，现在的数量考的不是很难，基本都是初中小数的题目，最高难度才是高中，把之前没有学好的补回来。

【答案汇总】工程问题：1-5：AACDB；6-8：ABA

行程问题：基期行程：1-2：DD；相对行程：1-5：DDCBB；6：D；比例行程：
1-2：AD

遇见不一样的自己

Be your better self