方法精讲-数量 4

主讲教师：唐宋

授课时间：2019.05.04

方法精讲-数量 4（笔记）

学习任务：

1. 课程内容：容斥原理、排列组合与概率

2. 授课时长：3小时

3. 对应讲义：178页～184页

4. 重点内容：

（1）掌握两集合公式，三集合的三种公式——标准型、非标准型、常识型

（2）掌握图示法在容斥原理中的运用，理解容斥原理结合最值的考法

（3）掌握常用的排列组合公式，理解分类讨论与分步计算的区别，正难反易则从

反面求解

（4）掌握两种经典方法（捆绑法、插空法）的适用范围和操作步骤

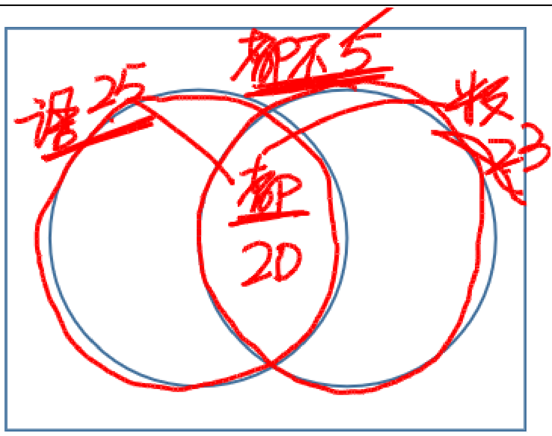
（5）掌握概率问题的两种题型——给情况求概率或给概率求概率

第八节　容斥原理

【知识点】容斥原理：中学学过的知识，如果忘记学过的知识也没关系，本节课老师会将公式推导一下，容斥原理指元素的包含和不包含关系。

【知识点】两集合：

1. 例子：一所学校有语文考试和数学考试，语文考试有 25 人及格（25 人属于元素，包含在左边的大圈里），数学考试有 23 人及格，语文和数学都及格的有 20 人，语文和数学都不及格的有 5 人，问全班有多少人，此时是容斥问题。包含的属于“容”，都不包含的属于“斥”。



2. 推导：先将语文和数学相加，即语文+数学；中间的 20 人算了两遍，需要再减一次，则全部=语文+数学-都+都不。将语文和数学抽象化，公式：A+B-A∩B（都）=全-都不。所有公式右边都一样（全-都不），只有左边不一样。代入数据：25+23-20=全-5，则全=33。

3. 公式：A+B-A∩B=全-都不。

【例 1】（2017 广东）某单位有 107 名职工为灾区捐献了物资，其中 78 人捐献衣物，77 人捐献食品。该单位既捐献衣物，又捐献食品的职工有多少人？

A. 48　　　　B. 50

C. 52　　　　D. 54

【解析】例 1. 判定题型，有两种情况（衣物、食品），出现“既……又……”，容斥原理问题，公式：A+B-A∩B=全-都不。已知“有 107 名职工为灾区捐献了物资”，即都不=0，代入数据：78+77-（　）=107-0，选项尾数不同，用尾数法，尾数 5-（　）=尾数 7，则（　）的尾数为 8，对应 A 项。【选 A】

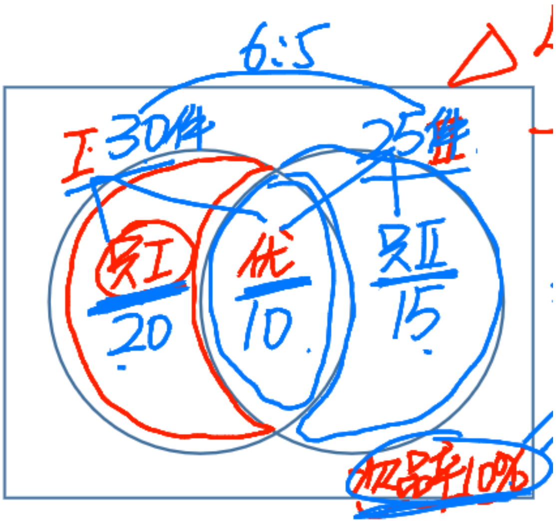
【注意】本题不是很严谨，如果出现捐别的东西，比如捐玩具，此时也是衣物和食品都不捐，即都不≠0，但是又不知道“都不”具体数值，所以也没有答案，考试的时候不要过于钻牛角尖。

例 2（2018 联考）某试验室通过测评Ⅰ和Ⅱ来核定产品的等级：两项测评都不合格的为次品，仅一项测评合格的为中品，两项测评都合格的为优品。某批产品只有测评Ⅰ合格的产品数是优品数的 2 倍，测评Ⅰ合格和测评Ⅱ合格的产品数之比为 6：5。若该批产品次品率为 10%，则该批产品的优品率为（　）。

A. 10%　　　　B. 15%

C. 20%　　　　D. 25%

【解析】例 2. 本题已知比例，没有具体数据，可以考虑赋值；出现“只有测评Ⅰ合格”，在公式中不存在，考虑画图法。左边的圈代表测评Ⅰ，右边的圈代表测评Ⅱ，已知Ⅰ和Ⅱ的比例，次品率为 10%。赋值优品数为 10 件，“只有测评Ⅰ合格的产品数是优品数的 2 倍”，则只有测评Ⅰ合格的为 20 件，测评Ⅰ合格的为 20+10=30 件，“测评Ⅰ合格和测评Ⅱ合格的产品数之比为 6：5”，则测评Ⅱ合格的为 25 件，只有测评Ⅱ合格的为 25-10=15 件，此时只Ⅰ+只Ⅱ+优品=20+10+15=45 件，45 件占 90%可以推出总数为 50 件，则（　）=优品数/总数=10/50=20%，对应 C 项。【选 C】



【注意】1. 题干数据不能全部代入公式计算的时候，可以考虑画图法。

2. 赋值本身与答案无关，只要好算即可。

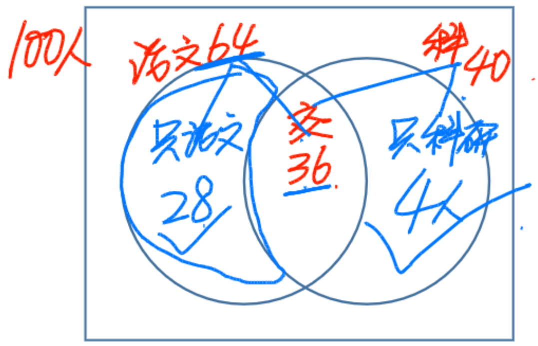
【例 3】（2016 四川）某学校 2015 年有 64%的教师发表了核心期刊论文；有 40%的教师承担了科研项目，这些教师中有 90%公开发表了论文，这些论文均发表在核心期刊上。则发表了核心期刊论文但没有承担科研项目的教师是承担了科研项目但没有发表论文的多少倍？

A. 4　　　　B. 7

C. 9　　　　D. 10

【解析】例 3. 有两种情况，一种是发论文，一种是承担科研项目；“有 40%的教师承担了科研项目，这些教师中有 90%公开发表了论文，这些论文均发表在

核心期刊上”，意思是科研项目与论文有交叉部分，“承担了科研项目但没有发表论文”，在公式中没有这种情况，可以考虑画图法。已知比例，可以考虑赋值。本题都是已知总的人群中的比例，所以赋值总人数为 100，则论文人数为 64，科研项目人数为 40，既有科研项目又有论文的人数为 40*90%=36，只发表论文人数为 64-36=28，只承担科研项目的人数为 40-36=4，则 28/4=7 倍，对应 B 项。【选 B】

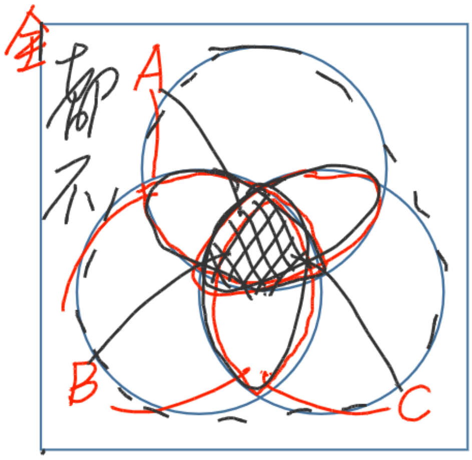


【注意】“这些论文均发表在核心期刊上”，即所有论文都是核心论文，本题和是不是核心论文无关。

【知识点】三集合：考试重点。

1.标准型公式（中学讲过）：A+B+C-A∩B-B∩C-C∩A+A∩B∩C=全部-都不。

2.推导：有 A、B、C 三个圆圈，整体大框是全部，先将 A、B、C 相加，即 A+B+C；此时发现 A∩B、B∩C、C∩A 都重复计算了一遍，需要减去，即 A+B+C-A∩B-B∩C-C∩A；中间三者交叉的区域（黑色网状阴影部分），A+B+C 时加了三次，减 A∩B、A∩C、B∩C 的时候也减了三次，此时阴影部分没有了，还需要再补一次，即 A+B+C-A∩B-B∩C-C∩A+A∩B∩C，公式：A+B+C-A∩B-B∩C-C∩A+A∩B∩C=全部-都不。



3.推导思路：A、B、C 各加一次，去掉重复部分（A∩B+B∩C+C∩A），再补漏掉的部分（A∩B∩C），即各加、去重、补漏。

例 4（2018 陕西）有关部门对 120 种抽样食品进行化验分析，结果显示，抗氧化剂达标的有 68 种，防腐剂达标的有 77 种，漂白剂达标的有 59 种，抗氧化剂和防腐剂都达标的有 54 种，防腐剂和漂白剂都达标的有 43 种，抗氧化剂和漂白剂都达标的有 35 种，三种食品添加剂都达标的有 30 种，那么三种食品添加剂都不达标的有（　）种。

A.14　　B.15

C.16　　D.17

E.18　　F.19

G.20　　H.21

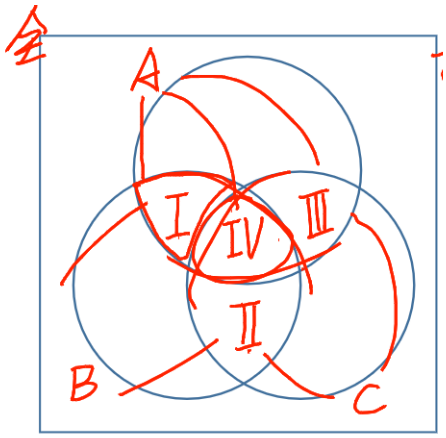
【解析】例 4.三种情况，两两交叉，所有数据在公式中都有，直接套用公式，A+B+C-A∩B-B∩C-C∩A+A∩B∩C=全-都不。设都不为 x，代入数据：68+77+59-（54+43+35）+30=120-x，选项尾数明显不同，用尾数法，尾数 4-尾数 2=尾数 0-x，尾数 2=尾数 0-x，则 x 尾数为 8，对应 E 项。【选 E】

【知识点】三集合：

1.非标准型公式（重点）：A+B+C-满足两项-满足三项*2=全-都不。

2.推导：如图，三个圆圈分别代表 A、B、C，用Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ表示交叉的部分。计算 A+B+C 时，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ都算了 2 遍，需要各去掉 1 遍，Ⅳ算了 3 遍，

需要去掉2遍，得到：A+B+C-Ⅰ-Ⅱ-Ⅲ-Ⅳ*2=全-都不。Ⅰ为满足A、B两项，Ⅱ为满足B、C两项，Ⅲ为满足A、C两项，所以满足两项即为Ⅰ+Ⅱ+Ⅲ，中间Ⅳ算满足三项，在公务员考试中，“满足两项”指的是“只满足两项”，如果说“满足至少两项（满足两项及以上）”，此时是满足两项+满足三项，Ⅳ为满足三项，即满足至少两项=Ⅰ+Ⅱ+Ⅲ+Ⅳ。公式：A+B+C-满足两项-满足三项*2=全-都不。



3.如何区分三集合标准和非标准公式：看条件，如果出现“既……又……”，用标准型公式；如果没有出现“既……又……”，用非标准型公式。“既……又……”只是一种说法，有类似条件就要用标准公式。

【例5】（2017重庆选调）一项农村家庭的调查显示，电冰箱拥有率为49%，电视机拥有率为85%，洗衣机拥有率为44%，至少有两种电器的占63%，三种电器齐全的占25%，则一种电器都没有的比例为：

A. 10%　　B. 15%

C. 20%　　D. 25%

【解析】例5.出现三种情况（电冰箱、电视剧、洗衣机），有交叉，判断题型为三集合容斥原理问题，本题没有出现“既……又……”，则用非标准公式，A+B+C-满足两项-满足三项*2=全-都不。题干中全部都是比例，考虑赋值。出现“占”，比重问题，设总人数为100，则电冰箱为49，电视剧为85，洗衣机为44，出现“至少有两种电器的占63%”，即满足两项+满足三项=63；“三种电器齐全的占25%”，即满足三项为25，则满足两项为63-25=38，设都不为x，代入数据：49+85+44-38-25*2=100-x，选项尾数有相同，需要计算，178-38-50=100-x，90=100-x，解得x=10，对应A项。【选A】

【注意】问一种电器都没有的情况，即既不能有电冰箱，又不能有洗衣机，还不能有电视机。理论上讲，电视机的拥有率为 85%，排除 C、D 项；没有电视机的为 15，且要求同时没有电冰箱和洗衣机，此时占比更会下滑，即要比 15%还要小，对应 A 项。

【答案汇总】1-5：ACBEA

例 6（2018 江西）某高校做有关碎片化学习的问卷调查，问卷回收率为 90%，在调查对象中有 180 人会利用网络课程进行学习，200 人利用书本进行学习，100 人利用移动设备进行碎片化学习，同时使用三种方式学习的有 50 人，同时使用两种方式学习的有 20 人，不存在三种方式学习都不用的人。那么，这次共发放了多少份问卷？（ ）

A. 370　　B. 380

C. 390　　D. 400

【解析】例 6. 问卷回收率=回收问卷/发出问卷。“不存在三种方式学习都不用的”，即都不=0，本题有三种情况，出现“同时使用三种方式”，三集合容斥原理问题，题干没有出现“既……又……”，用三集合非标准公式，A+B+C-满足两项-满足三项*2=全-都不。代入数据：180+200+100-20-50*2=全，解得全=360，此时发现答案没有 360，有同学认为自己算错，可能误选接近的 A 项。题目问的是发放多少问卷，此时算出来的是收回的问卷，即发放问卷=收回问卷/回收率=360/90%=400，对应 D 项。【选 D】

【注意】不明白用乘法还是除法时，可以想发放的数一定是一个大数，收回的数是一个小数，用小数除以一个百分数可以得到大数，如果用 360*90%得到的数会更小，故只能用除法。

【例 7】（2016 江苏）某单位举办设有 A、B、C 三个项目的趣味运动会，每位员工三个项目都可以报名参加。经统计，共有 72 名员工报名，其中参加 A、B、C 三个项目的人数分别为 26、32、38，三个项目都参加的有 4 人，则仅参加一个项目的员工人数是：

A. 48　　　　B. 40

C. 52　　　　D. 44

【解析】例 7. 出现“三个项目都可以报名”，不是强调每个员工都得报名三个项目；“共有 72 名员工报名”，则都不=0；三个条件有交叉，三集合容斥原理问题，题干比较短时，一般会用非标准公式，A+B+C-满足两项-满足三项*2=全-都不。在两集合容斥原理问题中出现“只”时，会考虑画图法，但本题出现“仅参加一个项目”，指的是只参加 A+只参加 B+只参加 C，此时不用画图法。这里有一个常识性公式，只报名一个项目+只报名两个项目+只报名三个项目=全-都不。此处“只”是“正好”的意思，设只参加一个项目的为 y，参加两项的为 x，将数据代入非标准公式，26+32+38-x-4*2=72，解得 x=88-72=16，则只一+只二+只三=全部-都不，y+16+4=72，解得 y=52，对应 C 项。【选 C】

【注意】常识性公式考查较少。

【例 8】（2018 辽宁）某班在筹备联欢会时发现很多同学都会唱歌和乐器演奏，但有部分同学这 2 种才艺都不会。具体有 4 种情况：只会唱歌，只会乐器演奏，唱歌和乐器演奏都会，唱歌和乐器演奏都不会。现知会唱歌的有 22 人，会乐器演奏的有 15 人，两种都会的人数是两种都不会的 5 倍。这个班至多有多少人？

A. 27　　　　B. 30

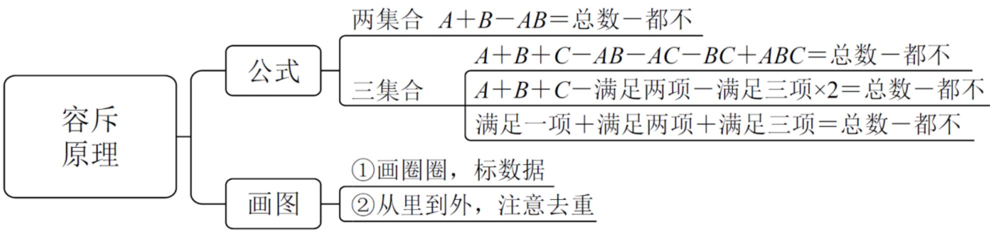
C. 33　　　　D. 36

【解析】例 8. 问“至多有多少人”，和最值问法结合考查。会唱歌的为 A，会乐器的为 B，数据都已知，不用画图，两集合公式：A+B-都=全部-都不。设都不为 x，全部为 y，“两种都会的人数是两种都不会的 5 倍”，代入数据：22+15-5x=y-x，化简：37-4x=y，要想 y 最大，37 是定值，则 4x 要最小，x=1 时，4x 最小，则 y=37-4=33，对应 C 项。【选 C】

【注意】1. 如果有 E 项为 37，此时也不能选 37，因为题干中已知“有部分同学这 2 种才艺都不会”，则都不的情况存在，即都不≠0，此时如果选 37 会和题干矛盾。

2. 本题 x 代表人数，则必定是整数。

【答案汇总】6-8：DCC



【小结】容斥原理：

1.公式（占 90%）：四集合、五集合不会考公式。

（1）两集合：A+B-A∩B=总数-都不。

（2）三集合：

①标准型（出现“既……又……”，数字相对较多）：A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C=总数-都不。

②非标准型（没有出现“既……又……”，数字相对较少）：A+B+C-满足两项-满足三项*2=总数-都不。

③常识公式（考查较少）：满足一项+满足两项+满足三项=总数-都不。

2.画图（占 10%）：优先用公式，公式不能用再考虑画图，比如问“只 A”。

（1）画圈圈，标数据。优先赋值交叉区域，如果条件中都是比重则赋值总体。

（2）从里到外，注意去重。比如三集合题目中，如图，满足三项的有 5 人，A∩B 有 9 人，则不能把“9”标在圈内，可以把“9”标在圈外，或者直接在圈内标注“4”。

第九节 排列组合与概率

一、排列组合公式

【知识点】排列组合与概率：从基础知识点讲起。

1.分类与分步：

（1）分类（要么……要么……）：相加。

例：从北京去上海，有 3 趟飞机、6 趟高铁，一类是坐飞机，一类是坐高铁，即要么坐飞机，要么坐高铁，属于分类，用加法，则共有 3+6=9 种不同的情况。

（2）分步（先……后……、既……又……）：相乘。

例：从北京先去上海，再去广州。从北京去上海，有 3 趟飞机、6 趟高铁，共有 9 种情况；从上海去广州有 2 趟飞机、4 趟高铁，共有 6 种情况。既要去上海又要去广州，分步用乘法，因此从北京去广州有 9*6=54 种不同的情况。

2.排列与组合：

（1）排列：与顺序有关。

①公式：从 n 个元素中选取 m 个，并考虑顺序，情况数为 A（n，m）=n*（n-1）*……*（n-m+1），推导过程不用掌握，只需要知道什么时候用、如何计算即可。

②记忆方法：从 n 开始往下乘 m 个数。

③例：从 10 个同学中选 3 个同学，并考虑顺序，情况数为 A（10，3）=10*9*8。下标决定从几开始乘，上标决定乘多少个。

④注意：公考题目不考查如何证明，知道怎么用即可。

（2）组合：与顺序无关。

①公式：从 n 个元素中选取 m 个，不考虑顺序，情况数为 C（n，m）=[n*（n-1）*……*（n-m+1）]/（1*2*3*……*m），分子为 A（n，m），分母为 A（m，m）。

②记忆方法：C（n，m）=A（n，m）/A（m，m），分子从 n 开始往下乘 m 个数，分母从 m 开始往下乘 m 个数。

③例：从 10 个同学中选 4 个同学，不考虑顺序，情况数为 C（10，4）=（10*9*8*7）/（4*3*2*1），约分计算即可。

④注意：任何情况下，C（n，m）的结果一定是整数。

3.判定标准（很重要）：从已选的主体中任意挑选出两个，调换顺序。有差别，与顺序有关（A）；无差别，与顺序无关（C）。

（1）例：在线的同学有 264 人，从中选出 3 人，第一个人给 1 万，第二个

人给 100 元，第三个人给 1 分，调换顺序有差别，则说明选人有顺序，用 A，情况数为 A（264,3）。

（2）例：从在线的 264 人中选出 3 个人，每人都给 1 万，随便调换顺序都没有差别，则不用考虑顺序，用 C，情况数为 C（264,3）。

（3）如果选出的人做一样的事情，就用 C；如果选出的人是不一样的情况，就用 A。

【例 1】（2017 山东）某部门从 8 名员工中选派 4 人参加培训，其中 2 人参加计算机培训，1 人参加英语培训，1 人参加财务培训，问不同的选法有多少种？

A. 256　　B. 840

C. 1680　　D. 5040

【解析】例 1. 有 2 人参加计算机培训，说明对于这 2 人来说是没有顺序的，有的人需要考虑顺序，有的人不需要考虑顺序，则要分步选人。

方法一：先从 8 人中选出 2 人参加计算机培训，没有顺序用 C，情况数为 C（8,2）=（8*7）/2=28。再从剩下的 6 人中选出 1 人参加英语培训，情况数为 C（6,1）=6。最后从剩下的 5 人中选出 1 人参加财务培训，情况数为 C（5,1）=5。“既……又……”，分步用乘法，总情况数=28*6*5=840。

方法二：先从 8 人中选出 4 人参加培训，再从 4 人中选出 2 人参加计算培训，再从剩下的 2 人中选择 1 人参加英语培训，最后剩下的 1 人参加财务培训。【选 B】

【注意】1. 如果从 n 个人中选 1 个，A 和 C 相同，C（n,1）=A（n,1）=n。

2. 考场上要灵活，三个情况数相加只有几十，最小的选项也有二百多，则可以判断应该用乘法。

【例 2】（2018 吉林）一位女士为了寻找曾经帮助她的司机，向新闻媒体提供了她记得的车牌信息。女士看到的车牌号为“吉 AC****”，最后一位是字母，其他三位全是奇数，且数字逐渐变大，那么符合要求的车牌有：

A. 380 个　　B. 260 个

C. 180 个　　D. 460 个

【解析】例 2. 奇数为“1、3、5、7、9”，车牌号只需要确定后四位。

方法一：最后一位是字母，从 A～Z，共有 26 种情况。其他三位全是奇数，且数字逐渐变大，相当于从“1、3、5、7、9”5 个数中选 3 个数，并从小到大排列。数字天然有顺序，即任意选出 3 个数后，从小到大排列都只有 1 种情况（比如选出来 1、3、7，从小到大排列只能为 137），因此不用再排序，情况数为 C(5,3)。既要选字母，又要选数字，分步用乘法，总情况数=C(5,3)*26=(5*4*3)/(3*2*1)*26=260。

方法二：字母的步骤很简单，有 26 种情况。字母和数字互不干扰，为乘法关系，观察选项，只有 B 项为 26 的倍数。【选 B】

【注意】1. 考查的是数学，条件中没有说明字母不能为 0 或 I，就不用考虑。

2. 拓展：从 5 个身高不同的人中选出 3 人，从低到高站成一排，问有多少种选法？

答：身高同样天然有顺序，选出 3 人后，从低到高只有一种方式，不需要排列，则用 C，情况数为 C（5,3）。

3. 如果情况数少，可以枚举；如果情况数多，就不建议使用枚举。

【例 3】（2018 联考）甲、乙、丙三所学校的学生被安排在周一至周五参观某革命纪念馆。纪念馆每天最多只能安排一所学校，其中甲学校连续参观两天，其余学校均只参观一天，那么共有多少种安排方法？

A. 12　　B. 24

C. 36　　D. 60

【解析】例 3. 要求把甲、乙、丙安排到周一至周五中，甲比较特殊，则先安排甲，甲连续参观两天，无论是 C（5,2）还是 A（5,2），意思都是任选 2 天（比如有可能选出周一和周四），不一定能满足连续的要求，则考虑枚举：可以是周一周二、周二周三、周三周四、周四周五，共有 4 种情况。再安排乙、丙，从剩下的 3 天中任选 2 天，乙和丙有时间顺序（比如乙周一参观、丙周二参观，和乙周二参观、丙周一参观，是两种不同的情况），用排列，情况数为 A(3,2)。“先……再……”，分步用乘法，总情况数=4*A（3,2）=4*3*2=24。【选 B】

【注意】如果是周一至周日中连续两天，则有 7 种情况；如果是从第一天至

第一百天中连续两天，则有 99 种情况。

例 4（2017 四川）某交警大队的 16 名民警中，男性为 10 人，现要选 4 人进行夜间巡逻工作，要求男性民警不得少于 2 名，问有多少种选人方法？（ ）

A. 1605　　B. 1520

C. 1071　　D. 930

【解析】例 4.“男性不得少于 2 名”，包含等于，即男性≥2。从 10 男 6 女中选，有三种情况：

（1）2 男 2 女：从 10 个男性中选 2 个去巡逻，没有顺序，情况数为 C(10,2)。从 6 个女性中选 2 个去巡逻，没有顺序，情况数为 C（6,2）。既要选男性又要选女性，分步用乘法，C（10,2）*C（6,2）=（10*9）/2*[（6*5）/2]=5*9*3*5，尾数为 5。

（2）3 男 1 女：从 10 个男性中选 3 个为 C（10,3），从 6 个女性中选 1 个为 C（6,1），分步用乘法，C（10,3）*C（6,1）=（10*9*8）/（3*2）*6=10*9*8，尾数为 0。

（3）4 男：从 10 个男性中选 4 个为 C(10,4)=(10*9*8*7)/(4*3*2)=10*3*7，尾数为 0。

“要么……要么……”，分类用加法，计算尾数，5+0+0，尾数为 5，对应 A 项。【选 A】

【注意】本题有一种经典的错误：有的同学可能这样想，男性不得少于 2 名，则从 10 个男性中先选出 2 人，再从剩下的 14 人中选出 2 人。错误的原因在于重复，假设第一步选出了男性甲和男性乙，第二步选出了男性丙和男性丁；也有可能第一步选出了男性丙和男性丁，第二步选出了男性甲和男性乙。这两种情况其实是相同的，但是计算了两次。做题的时候要分开选，男性选男性，女性选女性。

【例 5】（2017 吉林）罐中有 12 颗围棋子，其中 8 颗白子，4 颗黑子。从中任取 3 颗棋子。则至少有一颗黑子的情况有：

A. 98 种　　B. 164 种

C.132 种　　　　　　　　　　D.102 种

【解析】例 5.任取 3 颗棋子，至少有一颗黑子，则可以是一颗黑子、两颗黑子、三颗黑子，正面考虑比较麻烦，考虑反面情况，至少有一颗黑子的反面为一个黑子都没有，即全白。至少有一颗黑子的情况=总情况数-全白的情况。总情况数为从 12 颗棋子中选 3 颗，不需要考虑顺序，为 C（12,3）；全白的情况为从 8 颗白子中选 3 颗，白子是相同的，为 C（8,3）。至少有一颗黑子的情况=C（12,3）-C（8,3）=（12*11*10-8*7*6）/（3*2*1）=220-56=164。【选 B】

【注意】出现“至少一个某情况”，优先考虑反面解题。

二、经典题型

【知识点】捆绑法：相邻。之前排列组合方法精讲课会讲很多小题型，比如错位排列、插板法、隔板法等，发现学习思维负担很重，捆绑法和插空法最常用，所以现在方法精讲阶段主要讲插板法和捆绑法，其他的题型会在学霸养成课中，有一节专门的排列组合进阶。

1.引例.甲乙丙丁戊己 6 个老师站成一排照相，要求甲乙丙 3 人必须相邻，有（　）种不同的站法？

答：出现必须相邻，先把需要相邻的捆起来，之后再排列，把甲乙丙先捆成“大胖子”，接下来与丁戊己进行排序，需要注意内部顺序，谁在左边，谁在中间，谁在右边拍照可以看出来不一样，有顺序，甲乙丙三人进行排序用 A（3,3），把 n 个元素捆起来排序是 A（n,n），是全排列。甲乙丙相当于一个人，之后与丁戊己排序，相当于四个人一起排序，站成一排，还是全排列，是 A（4,4），列式：A（3,3）*A（4,4）=6*24=144。

注意：周一到周五选相邻的两天，不用捆绑法，因为周几是有顺序的，时间肯定是相邻的，不需要排序。

2.注意：（1）先捆：把相邻的元素捆绑起来，注意内部有无顺序。

（2）再排：将捆绑后的看成一个元素，进行后续排列。

【例 1】（2017 重庆选调）某画廊设计展出 10 幅不同的画，其中 5 幅国画，4 幅油画，1 幅水彩画，展览时排成一行，要求同一品种的画必须靠在一起，且

水彩画不放在两端，那么不同的陈列方式有多少种？

A. A（4，4）A（5，5）　　B. A（3，3）A（4，4）A（5，5）

C. A（3，1）A（4，4）A（5，5）　　D. A（2，2）A（4，4）A（5，5）

【解析】例 1.“同一品种必须靠在一起”，不是全部相邻，捆绑法。先捆国画，5 幅国画排序，相当于 n 个东西排序，是 A（5，5）；捆油画，4 幅油画捆绑，是 A（4，4），之后需要后续排列，“水彩画不能放在两边”，说明水彩只能在中间，只有一种情况，而国画和油画需要考虑顺序，哪个在左边哪个在右边不一样，则是 A（2，2）。分步进行，不是要么……要么……，用乘法，列式：A（5，5）*A（4，4）*A（2，2），对应 D 项。【选 D】

【注意】如果去掉“水彩画不放在两端”，则之后排序是 A（3，3）*A（4，4）*A（5，5）；错选 B 项是因为忘记水彩画规定了不能在两边。

【例 2】（2017 广东）单位工会组织拔河比赛，每支参赛队都由 3 名男职工和 3 名女职工组成。假设比赛时要求 3 名男职工的站位不能全部连在一起，则每支队伍有几种不同的站位方式？

A. 432　　B. 504

C. 576　　D. 720

【解析】例 2.“要求 3 名男职工的站位不能全部连在一起”，说明有的人可以相连，有的人不能相连，也可以全部不相连。比如甲在最左边，丙在最右边，乙在中间，也可以甲乙连在一起，中间隔一些，丙在右边，如果正面考虑，比较麻烦，需要考虑三人都分开，或者有两个相连，另一个分开，还需要考虑是甲乙相连、乙丙相连还是甲丙相连，有三种情况，正面分析很复杂。看反面，总-反面=总情况-能全相连=不能全部相连。总情况是 3 男 3 女 6 人排序，是 A（6，6），反面情况：3 个男的相连，先排 3 名男职工，是 A（3，3），之后和女生排，相当于 4 人排序，是 A（4，4），列式：A（6，6）-A（3，3）*A（4，4）=720-6*24，看尾数，尾数 0-尾数 4=尾数 6，对应 C 项。【选 C】

【注意】需要记忆 A（3，3）=1*2*3=6，A（4，4）=1*2*3*4=24，A（5，5）=1*2*3*4*5=120，A（6，6）=1*2*3*4*5*6=720。如果不记得 A（5，5），则 A（5，5）=A（4，4）*5=24*5=120，A（6，6）=A（5，5）*6=120*6=720，或者看尾数，从 A

（5,5）之后尾数都是 0 结尾。

【知识点】插空法：不相邻。

1.引例.甲乙丙丁戊己，6 个老师站成一排照相，要求甲乙丙 3 人必须不相邻，有（　）种不同的站法？

答：让丁戊己在甲乙丙之间，让甲乙丙不能相邻，先安排可以相邻的。先安排丁戊己，三人排序照相，排序有顺序，是 A（3,3）；之后插空，3 人形成 4 个空位，选 3 个空位放入甲乙丙，每人占 1 个空位。之前做过从 3 天选 2 天给乙丙，很多同学认为用 C，错认为天和天是一样的，但是给人是不一样的，有顺序，选空本身没有顺序，放入人的时候有顺序，则是 A（4,3）；列式：A（3,3）*A（4,3）=6*24=144。

2.注意：（1）先排：先安排可以相邻的元素，形成若干个空位。

（2）再插：将不相邻的元素插入到空位中。

【例 3】（2017 江苏）两公司为召开联欢晚会，分别编排了 3 个和 2 个节目，要求同一公司的节目不能连续出场，则安排节目出场顺序的方案共有：

A.12 种　　B.18 种

C.24 种　　D.30 种

【解析】例 3.方法一：本题和例 2 较像。比如甲公司有三个节目，乙公司有两个节目，说明甲公司的三个节目不能连续，乙公司的两个节目也不能连续，用插空法。只要有同一个公司两个节目相连就不满足题干。插空法需要先排能相邻的，但是本题都不能相邻，先排节目少的，即使算错了，剔除也比较简单，所以先排两个节目的，是 A（2,2），如图先排的两个节目是圈圈，后排的三个节目是三角，之后插空，发现两个圈圈形成三个空，正好插入三个三角，三个空位选三个空位放入三角，放入的是三个不同的节目，有顺序，是 A（3,3），此时圈圈之间不相邻，三角之间不相邻。A（2,2）*A（3,3）=2*6=12，对应 A 项。

方法二：有的同学想到交叉出现，比如 12121，三个节目放在 1 的位置，两

个节目放在 2 的位置，此时只需要对三个 1 排序，是 A（3,3），之后排 2 的顺序是 A(2,2)，1 和 2 之间的位置是固定的，不需要再排列，相乘之后也是 A(3,3)*A（2,2）=12，但是这种方法可遇不可求，考场时间不多，很难想到这种方法，可以用方法一，是通用的方法，比较容易想到；方法二想到了会发现简单，但是考场不容易想到。

方法三：有的同学先排三个三角，之后排两个圆，排三个三角是 A（3,3），之后形成四个空，选两个放入圆，如果两个圆圈放在头和尾，中间的三角会出现相邻，不满足题干，此时需要两个圆圈隔开三个三角，只有一种方法，把两个圆圈放在中间，需要考虑两个圆圈哪个在左边，哪个在右边，给两个圆圈排序即可，是 A（2,2），不能用 A（4,2）。【选 A】

【注意】1.不能全连：总数-全部相邻（捆绑法）。

2.不能连续：有的可以连续或者全不相连，比如 10 人有 9 人相连，其余 1 人不相邻是可以的，插空法。不能连续的反面不是全部相连，反面是有的可连续或全部连续两种情况。

3.捆绑法和插空法不是完全矛盾的，看着有些相似，但也不是完全相同的。

4.先排节目多的公司，可能会排错，需要考虑的情况多，不建议。

【例 4】（2018 四川下）某场学术论坛有 6 家企业作报告，其中 A 企业和 B 企业要求在相邻的时间内作报告，C 企业作报告的时间必须在 D 企业之后、在 E 企业之前，F 企业要求不能第一个，也不能最后一个作报告。如满足所有企业的要求，则报告的先后次序共有多少种不同的安排方式？

A. 12　　B. 24

C. 72　　D. 144

【解析】例 4.本题是“纸老虎”，需要 A、B 挨在一起，可以考虑捆绑法；“C 企业作报告的时间必须在 D 企业之后、在 E 企业之前”，说明 CDE 有特定顺序，需要保持 DCE 的顺序，但是需要注意，DCE 不需要相邻，因为题干只需要满

足位置的前后顺序，可以 D 在最前面，C 在中间，E 在最后；F 企业要求不能第一个，也不能最后一个作报告，一般最后考虑 F，只需要排列 AB 的情况数和 CDE 的情况数，之后把 F 放在中间即可。AB 用捆绑法，是 A（2,2）；DCE 的顺序是固定的，不需要排列，但是 DCE 需要和 AB 排列，只需要把 AB 看成整体放在 DCE 形成的四个空位中，是 C（4,1）有 4 种情况；AB 看成整体，DCE 是三个企业，前面四个企业排好了，考虑 F 不能在两端，只能在中间三个位置，从中间三个位置选一个，是 C（3,1）。总情况数=A（2,2）*C（4,1）*C（3,1）=2*4*3=24 种，对应 B 项。【选 B】

【注意】1.本题属于放东西的方式，不用插空法理解也是对的。

2.本题也可以先考虑 DCE 的顺序，之后考虑 AB 的顺序，再与 DCE 顺序，还是一样的做法。

3.出现不在两端，放在最后考虑。

【注意】排列组合的题目难度是顶天立地，难的特别难，简单的特别简单，不需要全部学会,有个别题目听不懂,也不需要纠结,只需要掌握中等题目即可。

【答案汇总】1-4：DCAB

三、概率问题

【知识点】概率问题：

1.给情况求概率（考的多）：概率=满足要求的情况数/总的情况数。比如：买彩票，问中一等奖的概率，需要满足中一等奖，假设有 10 种情况可以中奖，所有彩票总共 1 亿种情况，则概率=10/1 亿，满足要求的情况数是通过排列组合或者枚举的方法得出的。

2.给概率求概率（考的少）：

（1）分类：出现要么满足第一种，要么满足第二种，$P=P_1+P_2+\cdots\cdots+P_n$。

（2）分步：分为若干步骤，$P=P_1*P_2*\cdots\cdots*P_n$。比如：连胜三局，就是第一局胜率*第二局胜率*第三局胜率。

3.正难反易：1－不满足的概率。比如：正面难求，反面只有 1～2 种情况，

可以先求反面，一件事儿要么发生要么不发生，加和总情况就是 100%=1。

4.讲义上排列组合的题目比概率多，但是实际考试中概率的题目更多，只是概率问题需要用到排列组合。

【例 1】（2018 浙江）某基层机关有甲和乙两个办公室，共有 10 名员工，其中甲办公室人数为乙办公室人数的 1.5 倍。现从这 10 名员工中随机抽出 2 人借调到上级机关，问借调的人来自同一办公室的概率为：

A.1/3　　　　B.2/5

C.4/9　　　　D.7/15

【解析】例 1.题干中甲、乙有倍数关系，可以计算出甲、乙，甲+乙=10 人，“甲办公室人数为乙办公室人数的 1.5 倍”，设甲是 3x，乙是 2x，则 x=2，甲是 6 人，乙是 4 人，也可以用占的份数求，总共是 2.5 份，分给 10 人，每份 4 人。来自同一办公室可以都是甲办公室，也可以都是乙办公室，属于分类，用 P_1+P_2，先计算都在甲的情况+都在乙的情况，之后除以总情况，即 P=（同为甲+同为乙）/总。概率问题先计算分母，有的题目计算分母之后，可以根据选项直接选出答案。10 人里面随机选 2 人，选出的两人都是借调，甲乙或乙甲是一种情况，则是 C（10,2），都是甲里面的，则是 C（6,2），都是乙是 C（4,2）。列式：[C（6,2）+C（4,2）]/C（10,2）=（15+6）/45=7/15，对应 D 项。【选 D】

【注意】如果计算出分母是 50，选项分母是 8、10、3、7，则可以直接选分母为 10 的。

【例 2】（2018 吉林）一位乒乓球学员手中拿着装有 7 只乒乓球的不透明口袋，其中 3 只黄球，4 只白球。他随机取出一只乒乓球，观察颜色后放回袋中，同时放入 2 只与取出的球同色的球。这样连续取 2 次，则他取出的两只球中第 1 次取出的是白球，第 2 次取出的是黄球的概率是：

A.8/77　　　　B.4/21

C.2/11　　　　D.4/7

【解析】例 2.“他随机取出一只乒乓球，观察颜色后放回袋中，同时放入 2 只与取出的球同色的球”，如果取一个白色的球，需要把白球放回去，之后再放

入两个白色的球，此时袋子多了两个白色的球，取出黄色的球也是一样的，本题给了情况，没有给概率，属于给情况数求概率。每次取了球又放入了球，总数在变化，不能用一个分数计算出来，需要分情况讨论。$P=P_{1白}*P_{2黄}$，如果第一次取出白色的球，第一次取没有放入，还是 7 个球，是 4/7，不需要写 A 或者 C，因为从 a 个球中取 b 个白球中的 1 个，就是 b/a，从 a 个球中取是 C（a,1），取 b 个白球中的 1 个，是 C（b,1），即 C（b,1）/C（a,1）=b/a，如果用 C 表示，是 C（4,1）/C（7,1）。此时袋子中的球会发生变化，变为 9 个球，这 9 个球包括 3 个黄色的球、4 个白色的球和新放入的 2 个白色的球，取 2 个黄色的球，则是 3/9，也可以写为 C（3,1）/C（9,1），但是比较麻烦，列式：P=4/7*1/3=4/21，对应 B 项。【选 B】

【注意】总共 7 个球，从 4 个白色球中取 1 个，不是 C（7,4），C（7,4）是 7 个球中取了 4 个，但是本题都是一个一个的取。

【例 3】（2018 辽宁）一张纸上画了 5 排共 30 个格子，每排格子数相同。小王将 1 个红色和 1 个绿色棋子随机放入任意一个格子(2 个棋子不在同一格子)，则 2 个棋子在同一排的概率：

A. 不高于 15%　　　　B. 高于 15%但低于 20%

C. 正好为 20%　　　　D. 高于 20%

【解析】例 3. 本题是 2018 年最热门的考题，省考、联考、国考都考。“一张纸上画了 5 排共 30 个格子”，说明每排 6 个格子。

方法一：本题没有给概率的值，但是可以用特殊的方法理解概率，因为放两个棋子，可以假设第一个棋子随便放，发生的概率 P_1=100%，30 个里面挑一个是情况数，这里的 100%是一定可以放进去的概率。放入第二个棋子，需要和第一个棋子在一排，第一个棋子所在的排，还剩下 5 个格子可以放第二个棋子，总共还剩余 29 个格子，可以和第一个棋子在同一排的有 5 个，$P_2=5/29=0.16^+$，第一步的概率是 100%，则只需要计算出第二步的概率，对应 B 项。

方法二：传统思路：P=满足情况/总情况，满足情况需要从一排的 6 个位置中挑 2 个给红棋子和绿棋子，是 A（6,2），还需要 5 排中选 1 排，是 C（5,1），分子是 A（6,2）*C（5,1），总情况数是 30 个格子选 2 个，是 A（30,2），列式：

A（6,2）*C（5,1）/A（30,2）=（6*5*5）/（30*29）=5/29，对应 B 项。【选 B】

【注意】1.横着的是排，竖着的是列。

2.方法二需要注意不能忘记选排，选其中一排没有顺序，C（n,1）=A（n,1）。

【例 4】（2016 江苏）一辆公交车从甲地开往乙地需经过三个红绿灯路口，在这三个路口遇到红灯的概率分别是 0.4、0.5、0.6，则该车从甲地开往乙地遇到红灯的概率是：

A.0.12　　B.0.50

C.0.88　　D.0.89

【解析】例 4.本题给了概率，属于给概率求概率，如果直接认为三个都红灯属于都遇到红灯，这样理解是错误的，遇到红灯是指遇到三个红灯、两个红灯、一个红灯，还需要区分哪些是红灯，情况数很多，正难反易。遇到红灯属于至少遇到一个红灯，考虑反面，反面是三个都不是红灯，三个路口不是红灯的概率分别是 0.6、0.5、0.4，需要同时满足，则 $P_{反}$=0.6*0.5*0.4=0.12，不能错选 A 项，$P_{正}$=1-$P_{反}$=1-0.12=0.88，对应 C 项。【选 C】

【注意】1.本题是中学概率题目中非常经典的题目。

2.考场上有的同学会发现 A 项+C 项=1，直接选。

3.不考虑黄灯，不要钻牛角尖。

【例 5】（2017 四川）某杂志为每篇投稿文章安排两位审稿人，若都不同意录用则弃用；若都同意则录用；若两人意见不同，则安排第三位审稿人，并根据其意见录用或弃用。如每位审稿人录用某篇文章的概率都是 60%，则该文章最终被录用的概率是：

A.36%　　B.50.4%

C.60%　　D.64.8%

【解析】例 5.方法一：如果 A、B 意见不统一，则需要看第三人，看似是看第三人的意见，实际还是根据三票两胜的原理。假设是 1、2、3 三个评委，运气好可以连续两个评委都通过，即 1 和 2 都通过，则是 60%*60%=36%；如果两人意见不同，出现一人不同意，可能是 1、3 同意，2 不同意；1 不同意，2、3 同意，

情况数合并计算，是 2*60%*60%*40%=36%*0.8，总概率=36%*（1+0.8）=36*1.8，尾数是 8，对应 D 项。

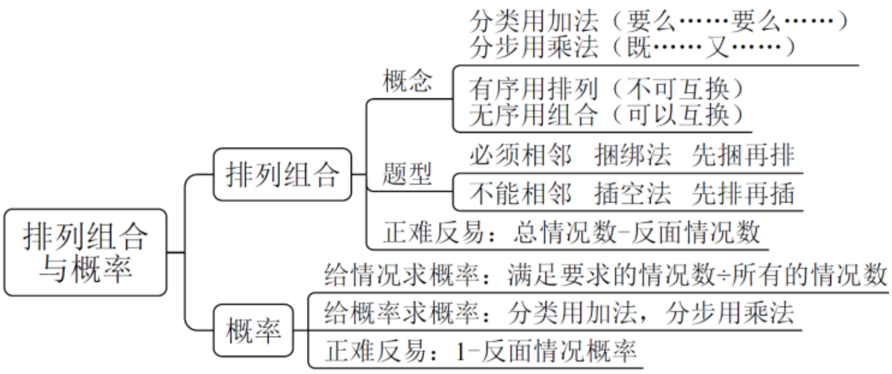
方法二：如果老师和别人一起打游戏，每局战胜的概率是 80%，赌注 1 万打一局，有 20%的概率可能输，有点犹豫，不想打；如果打 1 万局，只要胜 5001 局就可以得到 1 万元，此时胜的概率是 99.9%多，无限接近 100%；如果胜率大于 50%，次数越多，则最终的胜率会越来越高，接近 100%；如果每次胜率小于 50%，随着次数上升，胜率会接近 0。本题需要审三次，每位通过的概率是 60%，最终概率一定大于 60%，对应 D 项。【选 D】

【注意】1.小数可以用尾数法，选项数字都是精确的，可以看尾数。

2.题目只问同意不同意，不问谁先同意。

【注意】考试不会出现从 30 人里面选 29 人扫地，一般只会出现 30 人里面选 1 人不扫地。即 C（n,m），当 m 特别大，可以计算 C（n,n-m），个别计算会用到，比如 10 人里面选 8 人，此时可以用 C（10,2）选答案，但是 A 不可以用。

【答案汇总】1-5：DBBCD



【小结】排列组合与概率：

1.排列组合：

（1）概念：

①分类用加法（要么……要么……），比如：要么第一种，要么第二种，之后把两种加起来。

②分步用乘法（既……又……），只有既满足第一种，又满足第二种才可以，

两个都需要满足，用乘法。

③有序用排列 A（不可互换）。换位置不是看 n 个里面可不可以换位置，是 n 个里面选的 m 个可不可以换位置，比如从 100 人里面选 n 个，不是看 100 人的顺序，是看选的 n 人可不可以换位置。

④无序用组合 C（可以互换）。

（2）题型：

①必须相邻：捆绑法，先捆再排。

②不能相邻：插空法，先排再插。

（3）正难则反：总情况数-反面情况数。

2. 概率：

（1）给情况求概率：满足要求的情况数/所有的情况数。满足情况数可以通过排列和组合求，也可以用枚举法求。

（2）给概率求概率：分类用加法，分步用乘法。

（3）正难反易：1-反面情况概率。一般出现“至少一个”用反面，如果反面和正面分的情况数一样，就没有必要用反面做。

练习一.（2018 国考）某单位的会议室有 5 排共 40 个座位，每排座位数相同。小张和小李随机入座，则他们坐在同一排的概率：

A. 不高于 15%

B. 高于 15%但低于 20%

C. 正好为 20%

D. 高于 20%

【解析】练习一. 方法一：错选 A 项是最多的，是因为忘记了选 5 排中的 1 排。总情况数是 40 个座位中选 2 个入座，是 A（40,2），小张和小李是不同的人，需要考虑顺序，用 A；满足情况数是先 5 排里面挑 1 排，用 C（5,1），之后从 8 个座位中选 2 个，是 A（8,2），列式：P=[C（5,1）*A（8,2）]/A（40,2）=（5*8*7）/（40*39）=17%左右，对应 B 项。

方法二：两人凑一起，先让一人随机坐，概率是 100%，之后第二人在 39 个中随机选 1 个，选的 1 个需要是第一人所在的排，还剩下 7 个座位，即 7 个座位中选 1 个，是 7/39，对应 B 项。【选 B】

练习二.（2016 国考）某出版社新招了 10 名英文、法文和日文方向的外文编辑，其中既会英文又会日文的小李是唯一掌握一种以上外语的人。在这 10 人中，会法文的比会英文的多 4 人，是会日文人数的两倍。问只会英文的有几人？

A. 2　　B. 0

C. 3　　D. 1

【解析】练习二.错选最多的是 A 项。“问只会英文的有几人”，是会英文的基础上减掉会英文又会其他的，即去掉小李。本题是容斥原理问题，有三种情况出现交叉，但是本题只有 1 人交叉，属于非典型的。法文+英文+日文-1（小李）=总人数（10 人）-都不会的（0 人），则法文+英文+日文=11 人，“会法文的比会英文的多 4 人，是会日文人数的两倍”，出现倍数关系和多几人，可以设未知数，日文是 x 人，法文是 2x 人，则英文是 2x-4 人，列式：2x+2x-4+x=11，解得 x=3，英文=2x-4=2 人，问只会英文=2-1=1 人，对应 D 项。【选 D】

【注意】本题是新题型，只有 1 人重复，只需要减去重复即可，不需要补漏。

【注意】有舍有得，前提是有得到的能力。切勿将锦上添花的部分全盘放弃。战场上，剩者为王——剩者才能当胜者。

【答案汇总】第八节，容斥原理：1-5：ACBEA；6-8：DCC

第九节，排列组合与概率：排列组合公式：1-5：BBBAB；经典题型：1-4：DCAB；概率问题：1-5：DBBCD

遇见不一样的自己

Be your better self