粉笔直播课

方法精讲-数量 3

主讲教师：唐宋

授课时间：2019.05.03

方法精讲-数量 3（笔记）

学习任务：

1. 课程内容：经济利润问题、最值问题。

2. 授课时长：3 小时。

3. 对应讲义：171 页～177 页。

4. 重点内容：

（1）掌握与成本、利润、售价、折扣相关的公式，能准确地计算分段计费问题。

（2）掌握函数最值问题的题型特征及解题方法。

（3）掌握最值思维的解题方法，理解和定最值此消彼长的关系。

（4）掌握构造数列、最不利构造的题型特征及解题方法。

第六节　经济利润问题

一、基础经济

【知识点】经济利润问题：围绕生活中经常出现的概念去出题，比如老师买一个东西，商家会赚一部分钱，称为利润或者盈利。

1. 利润=售价-进价。利润也叫盈利，进价也叫成本。

2. 利润率=利润/进价。在资料分析中，利润率=利润/收入。在数量关系中，利润率=利润/成本。利润率在财务上有两种叫法，一种叫收入利润率，另一种叫成本利润率，资料分析研究的主体都是企业、地区、国家，是一个很庞大的集体，不好计算成本，但是营收很容易计算，所以直接用营收来计算。在数量关系中，研究的一个东西或者十个东西卖多少钱，比较简单，所以用成本来计算利润率。例：老师用 100 块钱买一个东西，卖 150 元，则利润=150-100=50 元，利润率=50/100=50%。

3. 售价=成本*（1+利润率）。150=100*（1+50%），推导：售价=进价+利润，利润=进价*利润率，售价=进价+进价*利润率=进价*（1+利润率）。

4. 辅助记忆：公式是可以类比的，进价类似资料分析中的基期量，售价类似

现期量，利润类似增长量，利润率类似增长率。现期量=基期量*（1+r），r=增长量/基期。增长量=现期量- 基期量。

5.折扣=折后价/折前价。生活中出现商品卖不动的情况，此时经常会打折，打折前是 150，打 9 折，打折后是 150*90%=135。打 8 折就是 150*80%，打 8.5 折就是 150*85%。打几折就是乘以百分之几十。

6.折扣率，和折扣相反，25%的折扣率，是 7.5 折。

7.总价=单价*数量；总进价=单个进价*数量；总利润=单个利润*数量=总售价-总进价。如卖 50 个商品，总利润=卖 50 个的钱-买 50 个的钱。

【例 1】（2017 四川）甲用 1000 万购买了一件艺术品并卖出，获利为买进价格的 10%，随后甲用艺术品卖出价格的 90%买入一件珠宝，并以珠宝买进价格的九折卖出，若上述交易中的其他费用忽略不计，则甲最终：

A.盈亏平衡　　　　　　B.盈利 1 万

C.盈利 9 万　　　　　　D.盈利 1.1 万

【解析】例 1.“获利”即利润，第一次买卖：利润=1000*10%=100 万，卖出艺术品的价格为 1000+100=1100 万。第二次买卖：成本为 1100 万*90%=990 万，卖的时候打 9 折，亏本了，亏了 1 折的钱，即亏了 1100 万*90%*10%=110 万*90%=99 万，一共赚了 100-99=1 万元。**【选 B】**

【注意】1.老师 8 块钱买个鸡，9 块钱卖出去，10 块钱又买了一只鸡，11 块钱又卖出去，在这个过程中老师一共赚了 2 块钱。每次买和卖都会产生利润，第一次买卖赚了 1 块钱，第二次买卖赚了 1 块钱，一共赚了 2 块钱。不需要再计算“9 元卖，10 元买”这一个过程，因为之前已经计算过一次了，再算就会重复。

2.遇到有多次买卖的题目，把买卖的过程分割开看，有 4 个买、卖的过程，可以分割成 2 次买卖。

3.本题也可以算出买珠宝的价格为 990 万，卖出的价格为 990 万*90%=891 万，再计算出卖珠宝亏损的钱。这种解法和老师的思路是一样的，不过老师的方法更简便一些，解题速度会更快一些。

4.一折=10%。

【例 2】（2018 江西）小李四年前投资的一套商品房价格上涨了 50%，由于担心房价下跌，将该商品房按市价的 9 折出售，扣除成交价 5%的相关交易费用后，比买进时赚了 56.5 万元。那么，小李买进该商品房时花了多少万元？

A. 200　　B. 250

C. 300　　D. 350

【解析】例 2. 国考中考查过一道非常相似的题目。注意手续费是成交价的 5%。

方法一：设买进的价格为 x，从开始买房到最后卖房一共赚了 56.5 万元，可列式：x*（1+50%）*90%*（1-5%）=x+56.5，1.35x*95%=x+56.5，（1.35*0.95-1）*x=56.5，x=200。

方法二：代入选项计算。把 200 万代入题目中，可以算出 200 万正确，A 项当选。

方法三：赋值法。赋值买进的价格为 100 万，上涨 50%，市价为 150 万，打 9 折，为 135 万，再扣除 5%的费用，135*5%≈6～7 万，剩余 128～129 万，赚了 28～29 万，实际上赚了 56.5 万元，说明实际情况是预想情况的 2 倍，则实际上买进的价格为 100*2=200 万元。【选 A】

【注意】1. 成交价为 x*（1+50%）*90%。

2. 一个数乘以 1.1，错位相加；一个数乘以 0.9，错位相减即可。

3. 方程是万能的解法，但是不一定是最快的。当题目难算时，采用代入法或者赋值法。

4. 如果本题变为扣除 10 万元的手续费，则不能用赋值法。10 万元是具体的数字，100 万是假设的数值，用一个假的数据减去真实的数据，一定是错误的。

5. 只有全部过程都按照比例计算时，才可以用赋值法。

【例 3】（2018 江苏）一款手机按 2000 元单价销售，利润为售价的 25%。若重新定价，将利润降至新售价的 20%，则新售价是：

A. 1900 元　　B. 1875 元

C. 1840 元　　D. 1835 元

【解析】例 3. “一款手机按 2000 元单价销售，利润为售价的 25%”，利润

=2000*25%=500 元。重新定价后，成本不变，利用成本不变去计算新售价。成本=售价-利润=2000-500=1500。“利润降至新售价的 20%”，则成本占新售价的 80%，1500/新售价=80%，新售价=1500/80%=187⁺，对应 B 项。【选 B】

【注意】1. 如果本题改为利润率为 25%，或者利润是成本的 25%，此时成本=2000/（25%+1）=1600，利润=2000-1600=400。

2. 在计算 1500/80%时，15/8=1+7/8=1+0.875，很明显对应 B 项。

【例 4】（2017 江苏）某公司将一款自行车 3 次折价销售，第二次在首次打折的基础上打相同的折扣，第三次在第二次打折的基础上降价三分之一。已知该款自行车 3 次打折后的价格是原价的 54%，则首次的折扣是：

A. 7. 5 折　　B. 8 折

C. 8. 4 折　　D. 9 折

【解析】例 4.“第二次在首次打折的基础上打相同的折扣”，假如原价为 100 元，第一次打 9 折，折后价为 90 元；第二次也打 9 折，是在第一次降价的基础上打 9 折，第二次折后价为 90*90%=81 元。“第三次在第二次打折的基础上降价三分之一”，第三次折后价为 81*（1-1/3）。本题全部都是比例，可以直接赋值，赋值原价为 100 元，设第一次打 n 折，则根据题意，可列式：100*n*n*（1-1/3）=54，n^2=81/100，n=9/10，即打 9 折。【选 D】

【注意】1. 经济利润问题中经常赋值原价或成本为 100，可以化去“%”，方便计算。

2. n=0. 9，如果选项中有 0. 9 折，不能选，0. 9=9 折，1 折=0. 1=10%。

【例 5】（2015 山东）商场里某商品成本上涨了 20%，售价只上涨了 10%，毛利率（利润/进货价）比以前下降了 10 个百分点。问原来的毛利率是多少？

A. 10%　　B. 20%

C. 30%　　D. 40%

【解析】例 5. 毛利率=利润/进货价。本题有原来和现在的变化过程、涉及三个变化量（成本、售价、毛利率），采用列表法。本题都是百分数、比例、百分点，考虑赋值法。以前是基础，赋值以前的成本为 100 元，成本上涨了 20%，

则现在成本为 120 元。设以前售价为 x，售价上涨了 10%，则现在售价为 1.1x。原来利润率=（x-100）/100，现在利润率=（1.1x-120）/120。“毛利率比以前下降了 10 个百分点”，以前利润率高，可列式：（x-100）/100-10/100=（1.1x-120）/120，先约分，得：(x-100-10)/5=(1.1x-120)/6，交叉相乘，得：5.5x-600=6x-660，x=120。原来毛利率=（120-100）/100=20%。【选 B】

比以前下降了10个百分点。问原来的毛利率是多少?

	成本	售价	利润率
前	100	x	$\frac{x-100}{100}$
现	120	1.1x	$\frac{1.1x-120}{120}$

【注意】1. 本题不用纠结是毛利率还是净利率，考数学运算不是考财务，不会考查毛利润和净利润具体怎么计算，题目中说怎么列式就怎么列式即可。

2. 当题目涉及时间、成本、售价、利润率等多个变化量时，优先采用列表法。

3. 此题也可以设利润率为 x。以前成本为 100，现在成本为 120，以前利润率为 x%，现在利润率为（x%-10%），以前售价为 100*（1+x%），现在售价为 120*（1+x%-10%）。根据“售价只上涨了 10%”，可列式：100（1+x%）*（1+10%）=120*（1+x%-10%），110（1+x）=120（90%+x%）。

4. 如果考场上计算不熟练，可以列式之后代入选项计算。其中 A 项不用代入计算，因为如果以前利润率为 10%，下降 10 个百分点之后利润率为 0，一般题目不会这样出。

5. 当题目中都是比例、百分数、百分点，没有具体数时，可以采用赋值法。

【答案汇总】1-5：BABDB

二、分段计费

【知识点】分段计费：难度较低，没有固定公式，准确分段即可。

1. 在生活中，水电费、出租车计费、税费等，每段计费标准不等。问：在不同收费标准下，一共需要的费用？

2. 计算方法：

（1）先按标准分开算。

（2）计算后再汇总。

3. 例：某地出租车收费标准为：3 公里内起步价 8 元；超出 3 公里的部分，每公里 2 元。小明打车坐了 12 公里，共花费多少钱？

答：把 12 公里分成两段（3 公里以内、超出 3 公里的部分），3 公里以内收费 8 元，3～12 公里的部分费用为 2*9 元，一共花费 8+18=26 元。

【拓展】（2016 河南）贾某在停车场停车，每个月前几个小时内收费的基础价格为 5 元/小时，之后按照基础价格的 90%收费，某月贾某的停车时间为 120 小时，共交了 545 元，则按照基础价格停车的时间为多少小时？

A. 8　　B. 10

C. 15　　D. 20

【解析】拓展. 基础部分的收费标准和超标部分的收费标准不一样，则把 120 小时分为两段（基础部分和超标部分）来看，基础部分每小时收费 5 元，超标部分每小时收费 5*90%元，设基础时间为 x 小时，可列式：5x+5*90%*（120-x）=545，0.5x=545-4.5*120，x=10。【选 B】

【例 1】（2016 河南）某商品的单位利润和进货量的大小相关，进货总额低于 5 万元时利润率为 5%，低于或等于 10 万元时，高于 5 万元的部分利润率在 10%，高于 10 万元时，高于 10 万元的部分利润率在 15%，问当进货量在 20 万元时，一共有多少万元的利润？

A. 1.75　　B. 2.25

C. 3.15　　D. 4.05

【解析】例 1. 把钱分成 3 个部分去算利润，0～5 万元：利润率是 5%，利润为 5 万*5%=0.25 万；5 万元～10 万元：利润率是 10%，利润为（10-5）*10%=0.5 万；10 万元～20 万元：利润率是 15%，利润为（20-10）*15%=1.5 万，加和 0.25+0.5+1.5=2.25 万。【选 B】

【注意】易错点：有些同学用 10 万*10%来计算 5 万元～10 万元这部分的利

润，用 20 万*15%来计算 10 万元～20 万元这部分的利润，这样做是错误的。注意是 5 万～10 万元的部分（10-5）是 10%的利润率，10 万元～20 万元的部分（20-10）是 15%的利润率。

【例 2】（2019 北京）王先生购买的医疗保险报销规定为：当年花费 1300 元（含）以内的部分全部自付，超出 1300 元部分自付 10%，其余部分由保险支付。王先生在 2018 年第一次到医院看病时，自己支付了 960 元，第二次看病自付了 520 元，则王先生第二次看病时医院共收费：

A. 1800 元　　B. 1960 元

C. 2140 元　　D. 2600 元

【解析】例 2. 方法一："当年花费 1300 元（含）以内的部分全部自付，超出 1300 元部分自付 10%"，意思是 1300 元以内的部分不给报销，超出 1300 元的部分报销 90%。注意题目问的是第二次看病时没报销之前的正常收费花费。本题分两段告诉钱数，分段点是按照一整年计算的，所以把两次费用合起来看，设全年看病总共应付 x 元，可列式：960+520=1300+（x-1300）*10%，解得：x=3100。960 元没有超过 1300 元，所以 960 元是王先生全部自付的，第二次收费=全年收费-第一次收费=3100-960=2140 元。

方法二（不推荐）：第一次支付的 960 元全是自己支付的，第二次支付的 520 元有一部分需要全部自付，另一部分需要自付 10%。全部自付部分=1300-960=340 元，此时还剩余 520-340=180 元，180 元是需要自付 10%的部分，180/10%=1800 元，此时易错选为 A 项，注意第二次支付的钱是分两次计算的，还需要加上 340 元，1800+340=2140 元。**【选 C】**

【注意】1. 分段计费类的题目，正常情况下是先给一个总数，如给 20 万元，问应该有多少利润；再如走了 12 公里，应该收多少钱。此题是分两次给了钱数（960 元和 520 元），报销的标准却不是按一次、两次这样分，而是按照全年去算，则按照报销的规定从整个年份考虑。

2. 方法二的思维过程比较复杂，算出 1800 之后很容易忘记加 340，所以不推荐。

3. 看到全年付款……的题目，如老师去商场买东西，全年买 0～5000 元钱的

部分可以打 9 折，5000 元～10000 元的部分可以打 8 折，则从全年的角度合起来去算钱。

【答案汇总】1-2：BC

三、函数最值

【知识点】函数最值：经济利润问题中最新颖的考法，中学有很多奇特的解题方法，如：x=-b/2a、求导等，但这时不需要了，这里给大家总结了更简单的方法。

1.题型特征：单价和销量此消彼长，即单价提升、销量下降；单价下降、销量提升，问何时总价/总利润最高？如下面的例题，发现这个问题比之前讲过的问题更有数学意义。有两个数乘在一起，一个是单价、一个是件数，都带有未知数 x，问函数的最大值或最小值。

2.计算方法（两点式）：

（1）设提价次数为 x，令总价/总利润为 0，解得 x_1、x_2，即价格变化 x 次，会写出一个函数方程（函数算式），令函数值为 0，解得两个根。

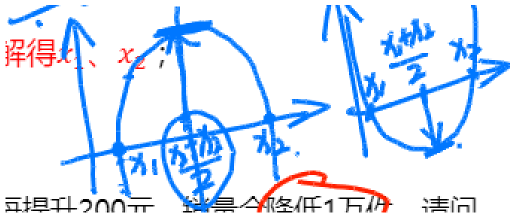
（2）当 x=（x_1+x_2）/2（平均值）时，取得最值。

（3）如：已知函数方程为（6+x）*（12-x），问函数的最大值。可以直接令算式为 0，求解 x，要么是（6+x）为 0、要么是（12-x）为 0，解得 x_1=-6、x_2=12。发现当 x 取 x_1 和 x_2 的平均值（-6+12）/2=3 时，函数取得最值。一个二次函数不能同时有最大值或最小值，所求结果一定是题目要求的最值。

3.例：单价为 3000 元，可卖出 15 万件。若单价每提升 200 元，销量会降低 1 万件。请问当单价定为多少元时，销售总额最高？

答：已知“单价为 3000 元，可卖出 15 万件”，假设提价的次数为 x 次，则提价之后的价格为（3000+200x）元，卖的件数为（15-x）万件，根据已知列式：总额=（3000+200x）*（15-x），令算式为 0，求得 x_1=-15、x_2=15，则当 x 取 x_1、x_2 的平均值（-15+15）/2=0 的时候总额最高。昨天讲过的题目，价格不变的情况下，钱数是最高的，涨价之后反而变少，当然，这里只是巧合，其他题目可能会提价几次之后总额最高。

4.分析：凡是此消彼长的题目，单价和销量都会带有 x，相乘之后是二次函数，二次函数特点是图像为抛物线，抛物线要么开口向上、要么开口向下（函数有最大值）。假设函数为 0，解得的 x_1、x_2就是与 x 轴交点的横坐标。由于抛物线的对称性，取平均值后对应的函数值就是最高点、最低点，故利用的是抛物线的对称性。当然用公式和求导都可以的，这里讲的是没有任何基础的情况下的解题方法。真题一般会给出两个括号相乘的形式，如果想要先解出 a、b，打开括号的时间用上面的方法足够把题目做完。



【例 1】（2016 联考）某种商品原价 25 元，成本为 15 元，每天可销售 20 个。现在每降价一元就可以多卖 5 件，为获得最大利润，需要按照多少元来卖？

A.23　　　　B.22

C.21　　　　D.20

【解析】例 1.问“获得最大利润，需要按照多少元来卖”，只需要把利润的函数写出来即可，总利润=单个利润*个数，原来每个的利润为 25-15=10 元，成本不变的情况下，设降价 x 次，则降价后：单个利润为（10-1*x）元、出售个数为（20+5x）个，列式：总利润=（10-x）*（20+5x），令其为 0，解得：x_1=10、x_2=-4，取平均，即当 x=（10-4）/2=3 时取最值，说明降 3 次、每次降 1 元时，获得最大利润，需要按照 22 元来卖。【选 B】

【例 2】（2017 天津滨海）某商店出售 A 商品，若每天卖 100 件，则每件可获利 6 元。根据经验，若 A 商品每件涨 1 元钱，每天就少卖 10 件。为使每天获利最大化，A 商品应提价：

A.6 元　　　　B.4 元

C.2 元　　　　D.10 元

【解析】例 2.直接给出获利，让获利最大化，把每天利润计算出来即可。

原来每件利润为 6 元，根据“若 A 商品每件涨 1 元钱，每天就少卖 10 件”，设涨价 x 次，列式：利润=（6+1*x）*（100-10x），令其为 0，解得：x_1=-6、x_2=10，取平均，故当 x=2 时取最值，即需要提价 2 次（2 元），直接对应 C 项。【选 C】

【例 3】（2018 联考）某苗木公司准备出售一批苗木，如果每株以 4 元出售，可卖出 20 万株，若苗木单价每提高 0.4 元，就会少卖 10000 株。问在最佳定价的情况下，该公司最大收入是多少万元？

A. 60　　　　B. 80

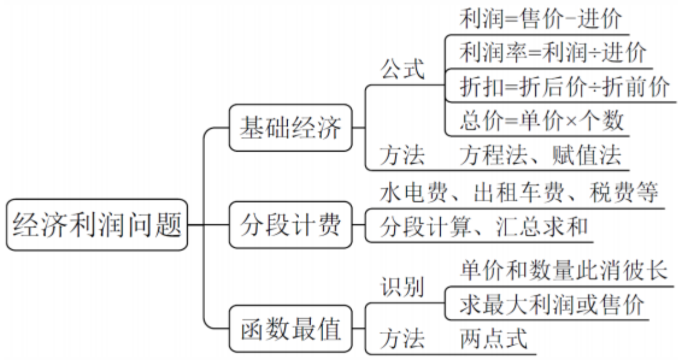
C. 90　　　　D. 100

【解析】例 3. 问的是最大收入，已知“若苗木单价每提高 0.4 元，就会少卖 10000 株”，统一单位：10000=1 万。设提高次数为 x 次，列式：收入=（4+0.4x）*（20-x），收入不用扣除成本，令其为 0，解得：x_1=-10、x_2=20，取平均，故当 x=5 时，取最值，需要计算出具体钱数，代入原式：收入=6*15=90，对应 C 项。【选 C】

【注意】1. 本题数据设计得巧，本身 B 项（4 元*20 万株=80 万元）就不能选，排除。本身是否会是最大值？可以尝试提一下提高价格，假设 4 元提升 0.4 元，结果为 83.6 万元，故 B 项一定排除。

2. 小技巧：4 元提升 0.4 元，即上涨 10%，20 万下降 1 万，即下降 5%，明显涨价是有收获的，故 B 项一定错误。只有在左边幅度和右边幅度近似相等的时候，可能会出现在不变情况下获利最大。

【答案汇总】1-3：BCC



【小结】经济利润问题：

1. 基础经济：

（1）公式：

①利润=售价-进价。

②利润率=利润/进价，注意与资料分析的定义有所不同。

③折扣（与打折前比）=折后价/折前价，一般给折扣率都是指降低的部分，做题的时候可以从语境中读出来。

④总价=单价*个数。

（2）方法：方程法（给具体钱数，如例 1～3）、赋值法（没有给具体钱数，如例 4～5）。

2. 分段计费：准确分段即可，如果是算全年，注意按照全年分段，不要一次一次分段。

（1）水电费、出租车费、税费等。

（2）分段计费、汇总求和。

3. 函数最值：

（1）识别：单价和数量此消彼长；求最大利润或售价。

（2）方法：两点式，即令函数为 0，解得 x_1、x_2，直接取平均，对应的就是函数的最值。假如抛物线中间的点不能取值，如 2 和 17 的平均为 9.5，如果 x 必须为整数，可以把 9 和 10 分别代入，比较大小即可，这种情况理论上存在，但是考试的时候还没有遇到过。

第七节　最值问题

【知识点】最值问题：考试中问法出现“至多”“至少”都可以判断是最值问题，可以与其他很多题型结合起来考。如：与经济利润问题结合一起求最大利润，或与容斥原理结合考查，有很多和其他题型结合一起的考法。同时有一些独特的考法，如：数列构造和最不利构造问题。

1. 最值思维。

2. 数列构造。

3. 最不利构造。

一、最值思维

【知识点】最值思维：之前的函数最值是利用的高中的基础知识。

1. 和定，则此消彼长。如：把 100 元分给甲、乙、丙 3 个人当做奖金，要求分给甲的钱数最多，且每个人的金额数都不同。需要甲尽可能多，其他两人分得越少越好，故丙分 1 元、乙分 2 元（或乙分 1 元、丙分 2 元），故甲分得 97 元。

2. 考虑最极端情况：问“最多”“最少”，考虑最极端的情况，最怕想到比较极端的时候就作答。有的时候可能两种思路，想出 2 个答案，如：一个答案是 15、另一个答案是 17，问最大，需要选大的 17。

【例 1】（2016 江苏）某学校举办知识竞赛，共设 50 道选择题，评分标准是：答对 1 题得 3 分，答错 1 题扣 1 分，不答的题得 0 分。若王同学最终得 95 分，则他答错的选择题最多有：

A. 12 道　　　　B. 13 道

C. 14 道　　　　D. 15 道

【解析】例 1. “答错 1 题扣 1 分”即不仅不给分还需要扣分。确定最终分数为 95 分，问“他答错的选择题最多有”。理论上来讲，可以看成不定方程问题，有答对、答错、不答 3 种情况，可以看成 3 个未知数、2 个方程的方程组问题，然后用代入的思维求解。这里不用代入思路，正常计算。答题分数的题目，一般先假设全对，应该得到 3*50=150 分，实际少得 190-95=55 分，只需分析 55 分扣在哪里即可。由于是假设全对，所以扣分的情况为：答错、不答，即少的 55 分包括：答错 1 道在全对基础上少 4 分、不答 1 题在全对基础少 3 分。问答错最多几个，即让答错尽可能多，故需要让 55 分尽可能是扣 4 分得到的。理论上不可能没有不答题，因为 55 不能整除 4。尝试最少有 1 道题不答（扣 3 分），剩下 55-3=52 分，52=4*13，故剩余的分数是 13 个错题扣的，求得最多有 13 个题目答错，对应 B 项。【选 B】

【注意】很多同学很难想到第 1 步，会想正面凑分数。如果转化为全对，只有不答和答错 2 种情况就很好想了。

【例 2】（2016 江西法检）某班 78 位同学对参加演讲比赛的甲、乙、丙、丁四位同学进行投票，得票最多者胜出。在计票过程的某时刻，甲得 20 票，乙得 12 票，丙得 26 票，丁得 9 票，那么丙最少还要得票多少张才能确保胜出？

A. 3　　　　B. 5

C. 6　　　　D. 7

【解析】例 2. 方法一：投票问题，是比较冷门的题目，实际是最值分析问题。“得票最多者胜出”，没有要求票数过半，问“丙最少还要得票多少张才能确保胜出”，即只要给出几张票之后，无论怎么投票，丙都一定胜出，需要考虑极端情况。可以计算 4 个人的票加和为 20+12+26+9=67 张，还有 78-69=11 张票，如何分配 11 张票才能保证丙一定胜出，注意把剩余票数分半不是最少的情况。最少情况：第一名比第二名之只多 1 票（奇数票）或 2 票（偶数票）最终胜出。剩余的票两步操作：（1）先让丙和第二名（甲）平票，即先给甲 6 张票。（2）剩下 11-6=5 张，这时丙和甲并列第一，分给甲 2 张、丙 3 张，使得丙胜出，一共给丙 3 张票，对应 A 项。

方法二：这里题目的通解：“（总票数-费票数）/2”为保证当选的票数，如果计算出来是小数，需要向上取整。“费票”即第三名、第四名等打酱油的票，他们拿到票后无法决定最终的胜局。代入列式：（78-12-9）/2=28.5，向上取整为 29，拿到 29 张票的人就一定可以赢，故丙最少还要得票 29-26=3 张才能确保胜出，对应 A 项。

方法三：本题用代入的方法也可以，数学题目中代入的方法很重要，最少为 A 项，代入 A 项：给丙 3 张，丙得到 29 张票，剩下 8 张全给甲，甲得到 28 张，此时甲输，A 项当选。【选 A】

【注意】1. 如果把票给丁就更赢了，我们做题的时候考虑的是最极端的情况。

2. 如果让甲当选，给甲 29-20=9 票即可当选。

【例 3】（2018 山东）某企业招聘一批新员工，有 65%的应聘者通过笔试，在面试环节有 20 人被淘汰，最终录取的人数占总应聘人数的 40%，企业将录取的新员工分成若干个小组进行业务培训，每个小组的人数都不相同，每组至少 2

人，问至多可以分成多少个组？

A. 7　　　　B. 8

C. 5　　　　D. 6

【解析】例 3. 根据“有 65%的应聘者通过笔试，在面试环节有 20 人被淘汰，最终录取的人数占总应聘人数的 40%”，即总人数*（65%-40%）=20 人，可以求得总应聘人数为 80 人。问录取情况，录取人数为 80*40%=32 人，有的同学用比例法可以算出来，但是最好理解的是把总人数算出来。32 人分若干组，每组人数不相同，且每组至少 2 个人，问至多可以分成多少个组。分组的时候需要让组数尽可能多，即每组的人数尽可能少。已知“每个小组的人数都不相同”，每组都是 2 人不可能，可以慢慢增加人数，即 2、3、4、5、6、7……。计算人数，看什么时候刚好加到 32，2+3+4+5+6+7=27 人，剩下 5 人，无法把剩下的 5 人分成 1 组，因为 5 人是重复的，故最多只能分 6 个组，最后的 5 个人随机分配到前面的组中即可，对应 D 项。【选 D】

【注意】1. 把剩下的 5 人放到 2 人组中就变为 7 人了，是不可以的。其实不需要考虑剩下的人放到哪里，只要想到 6 组情况即可。

2. 例：

（1）共有 38 人分组，每组至少 3 人且每个小组的人数都不相同。问至多可以分成多少个组？

答：3、4、5、6、7、8，加和为 33，多出 5 人不可能单独分成 1 组，故答案为 6 组。

（2）共有 26 人分组，每组至少 2 人且每个小组的人数都不相同。问至多可以分成多少个组？

答：2、3、4、5、6，加和为 20，多出的 6 人不可能单独分成 1 组，故答案为 5 组。

3. 给出的数据特别大是不可能的，如果真的这样，就变成了等差数列求和问题，但实际是考查最值思维，一般只考 30 以内的数字。

【答案汇总】1-3：BAD

二、构造数列

【知识点】构造数列：套路题。某个主体最多/少……。如分了 5 个小组，第 3 组的人最多分多少；或者分了 10 个小队，最后那个小队最少分了多少。

1.5 个人分 423 斤肉，分到的重量均为整数且互不相等。分得最多的人，最少分（ ）斤。

答："分得最多的人，最少分几斤"，"最多"修饰的是人，说的是分得东西最多的人，"最少"说的是数量。问某个主体最多/少。按照分到的重量从多到少排序 1～5，设第 1 名分 x 斤。总和是定值，要让第 1 名最少，其他的要越多越好，已知"分到的重量均为整数且互不相等"，则第 2 名最多分 x-1 斤，第 3 名最多分 x-2 斤，第 4 名最多分 x-3 斤，第 5 名最多分 x-4 斤。x+x-1+x-2+x-3+x-4=423，解得 x=（423+10）/5=86.6，因为 x 为整数，问最少，向上取整，则 x 取 87。理解：x 至少是 86.6，所以不能取 86。与小数无关，就算求出 x=86.1，也要向上取整。问最多，向下取整。

名次 1↓ > 2↑ > 3↑ 4↑ 5↑.

$x+x-1+x-2+x-3+x-4=423$

2.方法：求谁设 x——反向推其它——求和列式。

【例 1】（2017 山东选调）某大型跨国连锁零售企业在世界 8 个城市共有 76 家超市，每个城市的超市数量都不相同。如果超市数量排名第四的城市有 10 家超市，那么超市数量排名最后的城市最多有几家超市？

A.3　　　　B.4

C.5　　　　D.6

【解析】例 1.排名最后的即第 8 名。按照城市的超市数量从高到低排序，第 1 名～第 8 名，求第 8 名，设第 8 名城市有 x 家超市，题中已知第 4 名有 10 家超市。要让第 8 名城市的超市数量最多，其他城市的超市数量要尽可能少。第 7 名要比第 8 名多，而且要取最小，则第 7 名的城市最少有 x+1 家超市，第 6 名的城市最少有 x+2 家超市，第 5 名的城市最少有 x+3 家超市，第 3 名的要比第 4 名的多，则第 3 名的城市最少有 11 家超市，第 2 名的城市最少有 12 家超市，第 1 名的城市最少有 13 家超市。13+12+11+10+x+3+x+2+x+1+x=76，46+4x+6=76， 4x+6=30，解得 x=6，对应 D 项。【选 D】

1 2 3>4 5 6 7>8

13 12 11>10 x+3 x+2 x+1>x =76

【注意】1. 第 4 名不能用 x+4，本题算出 x=6，x+4=10 与题中给出的第 4 名正好相等是巧合，换一道题目就不对了，不要把巧合当必然。

2. 如果考试直接选出来，严格来讲思维上是有漏洞的，最后还需要补充一个步骤，验证一下，验证第 4 名和第 5 名是否满足大于的关系，即验证 10＞x+3。代入 x=6，10＞6+3，满足。为什么加验证的过程？如果算出 x=7，第 5 名 x+3=10，此时与第 4 名是相等的，是不满足“第 4 名＞第 5 名”的，此时要满足 10＞x+3，x＜7，只能取 x=6。国考中出现过这种情况，但是没有考这个陷阱，本题非常接近这个陷阱，所以要验证一下。

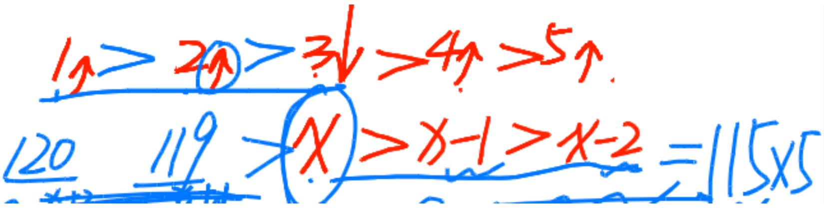
2. 总数 76 是固定的，数据都是根据 76 算出来的，不会超过 76。数据都是取的最小值，左边的数据都是可以根据情况微调的，只需要根据逻辑算出 x 即可，考场上不要纠结。

【例 2】（2017 江苏）在一次竞标中，评标小组对参加竞标的公司进行评分，满分 120 分。按得分排名，前 5 名的平均分为 115 分，且得分是互不相同的整数，则第三名得分至少是：

A. 112 分　　　　B. 113 分

C. 115 分　　　　D. 116 分

【解析】例 2. 总共有 5 名，按照得分从高到低排序，第 1 名～第 5 名。问第 3 名得分最少是多少，假设第 3 名得分最少为 x，要让第 3 名得分尽量少，其他人得分要尽量高。第 4 名、第 5 名都是要小于第 3 名（x），而且要取最大，则第 4 名得分最高为 x-1，第 5 名得分最高为 x-2。第 1 名、第 2 名都是要大于第 3 名，而且要取最大，第 1 名和第 2 名不是 x+2 和 x+1，而是要考虑满分的情况，第 1 名得分最高 120 分，因为得分互不相同，则第 2 名得分最高为 119 分。“前 5 名的平均分为 115 分”，则 120+119+x+x-1+x-2=115*5，236+3x=575，解得 x=113，对应 B 项。【选 B】



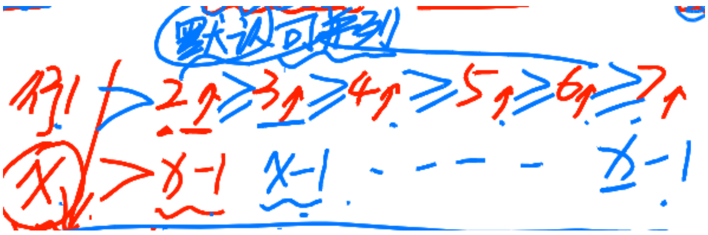
【注意】如果 x 在中间，一定是一侧为整数，另一侧为未知数。比 x 小的是要在 x 基础上变；大于 x 的要尽量大，是在满分的基础上变。

【例 3】（2013 国考）某单位 2011 年招聘了 65 名毕业生，拟分配到该单位的 7 个不同部门，假设行政部门分得的毕业生人数比其他部门都多，问行政部门分得的毕业生人数至少为多少名？

A. 10　　　　B. 11

C. 12　　　　D. 13

【解析】例 3. “行政部门分得的毕业生人数比其他部门都多”，即行政部门是分得人数最多的，即第 1 名。按分得的毕业生人数从多到少排序，第 1 名～第 7 名。设第 1 名分得 x 人，行政部门分得的人数最少，则其他的部门分得的人数要越多越好。第 2 名要比第 1 名少，而且要取最大值，则第 2 名最多分得 x-1 人。题中没有说其他部门分得的人数互不相等，其他部门分得的人数是可以并列的。题中没有说互不相同就默认是可以相同的。剩下第 3 名～第 7 名都最多分得 x-1 人。x+x-1+x-1+x-1+x-1+x-1+x-1=65，65=7x-6，解得 $x=10\frac{1}{7}$，问“至少为多少”，问最少，向上取整，x 取 11，对应 B 项。【选 B】



【注意】1. 做题时注意题中有没有“互不相等”这句话。题中没有说互不相同就默认是可以相同的。

2. 15 道题如果全蒙一个选项，往往在国考中只能对 3～4 个。

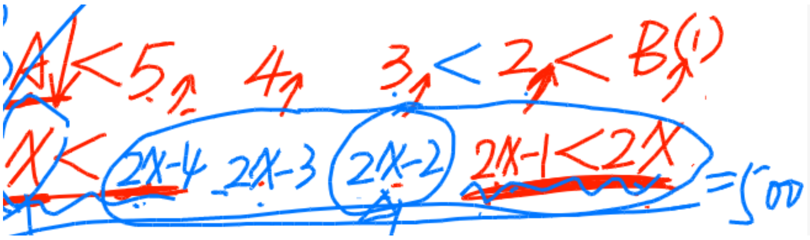
【例 4】（2018 四川）企业今年从全国 6 所知名大学招聘了 500 名应届生，从其中任意 2 所大学招聘的应届生数量均不相同。其中从 A 大学招聘的应届生数

量最少且正好为B大学的一半。从B大学招聘的应届生数量为6所大学中最多的。则该企业今年从A大学至少招聘了多少名应届生？

A. 48　　　　B. 47

C. 46　　　　D. 45

【解析】例 4.“A 大学招聘的应届生数量最少且正好为 B 大学的一半”，A 大学招聘的是最少的，B 大学招聘的是最多的，设 A 大学招聘 x 人，B 大学招聘 2x 人，中间有第 2 名～第 5 名。要让 A 大学招聘的最少，其他学校招聘的要越多越好。B 大学招聘的是最多的，即第 1 名，第 2 名比 B 大学招聘的人数少，则第 2 名最多招聘 2x-1 人；同理，第 3 名小于第 2 名，第 3 名最多招聘 2x-2 人；第 4 名最多招聘 2x-3 人，第 5 名最多招聘 2x-4 人。2x+2x-1+2x-2+2x-3+2x-4+x=500，“2x～2x-4”是等差数列，可以用“中间项*项数”，即（2x-2）*5+x=500，解得 x=46 点几，问最少，向上取整，取 47，对应 B 项。【选 B】



【注意】1. 第 2 名～第 5 名都是取最大值，要以 2x 为基础来分析。

2. 所有构造数列类的问题：

（1）设某个数为 x，大于 x 的值，且最小，取 x+1、x+2……；大于 x 的值，且最大，取……98、99、100，从满分倒着回来。

（2）小于 x 的值，且最小，取 1、2、3……；小于 x 的值，且最大，取……x-2、x-1。

（3）x 在中间，一侧是未知数，一侧是常数。如要让 x 取最大值，左侧要取最小，右侧也要取最小，即左侧是 1、2、3……，右侧是 x+1、x+2……；要让 x 取最小值，左侧要取最大，右侧也要取最大，即左侧是……x-2、x-1，右侧是……98、99、100。

A.48
B.47
C.46
D.45

且最小 1,2,3…
且最大 …,x-2,x-1
< x <
且最小 x+1 x+2…
且最大…98,99,100

【答案汇总】1-4：DBBB

三、最不利构造

【知识点】最不利构造：三种题型中考得最少，套路性强。至少……保证……。

1.袋子中装有 5 个红球，8 个白球，10 个黄球。问：

（1）至少取出（　）个，才能保证有红球？

答：有的同学说运气好取 1 个就是红球，但是要“保证有红球”，有可能取 1 个取的是白球或黄球；有同学说取 3 个球，有可能 3 个白球或 3 个黄球，就是没有红球。要考虑最倒霉的情况，取 8 个白球、再取 10 个黄球，下一个一定就是红球，即 8+10+1=19。

（2）至少取出（　）个，才能保证至少有 3 个同色的球？

答：目标是 3 个同色的球，先每种颜色的球取 2 个，取 2 个红球、2 个白球、2 个黄球，此时再拿一个，无论拿哪一个颜色的球都保证有 3 个同色，即 2+2+2+1=7。

（3）至少取出（　）个，才能保证至少有 8 个同色的球？

答：目标是 8 个同色的球，最倒霉的情况是每种颜色的球有 7 个，有同学说取 7 个红球、7 个白球、7 个黄球，这样是不对的，要注意题中球的个数，只有 5 个红球，红球最多只能取 5 个。取 5 个红球、7 个白球、7 个黄球，再取 1 个不论是黄色还是白色，都能有 8 个同色的球，即 5+7+7+1=20。

2.方法：要保证同种情况至少 n 个，应每种情况各取（n－1）个（如果有不够 n－1 的有多少取多少），最后再加 1。目标是 3 个同色球，每种取 2 个；目标是 8 个同色球，每种取 7 个，不够 7 个的有多少取多少。

【例 1】（2016 吉林）有 6 种颜色的小球，数量分别为 4，6，8，9，11，10，

将它们放在一个盒子里，那么，拿到相同颜色的球最多需要的次数为：

A. 6　　　　B. 12

C. 11　　　　D. 7

【解析】例 1.“拿到相同颜色的球最多需要的次数”和“至少……保证”是一样的逻辑，考试一般都是问“至少……保证”，本题默认每次摸一个球。“相同颜色的球”，即拿到 2 个同色就可以，至少 2 个球同色，最倒霉的情况是每种颜色的球都拿 2-1=1 个，再加 1。6 种颜色球每种拿 1 个，再加 1，即 6*1+1=7，对应 D 项。【选 D】

【例 2】（2015 河北）有软件设计专业学生 90 人，市场营销专业学生 80 人，财务管理专业学生 20 人及人力资源管理专业学生 16 人参加求职招聘会，问至少有多少人找到工作就一定保证有 30 名找到工作的人专业相同？

A. 59　　　　B. 75

C. 79　　　　D. 95

【解析】例 2. 问题转化为“要选出多少人才能保证有 30 人同种专业”，每种专业先选 29 人，再加 1。有的专业不够 29 人，有多少取多少，即全取。则 29+29+20+16+1=58+36+1=90⁺，对应 D 项。【选 D】

【注意】1. 不用考虑顺序问题，题中只是问“有多少人找到工作”，先找到、后找到都是找到。

2. 为什么 20 人和 16 人要全取？如果 20 人的取 19 人，最后的“加 1”有可能取到剩下的这个人，所以要全取。

【例 3】（2017 辽宁）某高校举办一次读书会共有 37 位同学报名参加，其中中文、历史、哲学专业各有 10 位同学报名参加此次读书会，另外还有 4 位化学专业学生和 3 位物理专业学生也报名参加此次读书会，那么一次至少选出多少位学生，将能保证选出的学生中至少有 5 位学生是同一专业的？

A. 17　　　　B. 20

C. 19　　　　D. 39

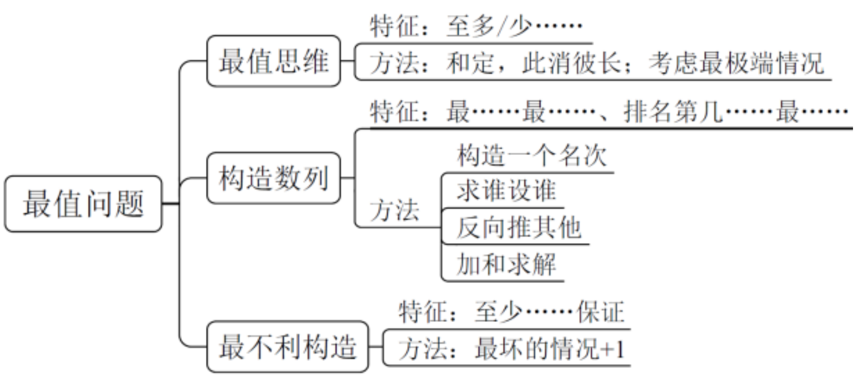
【解析】例 3. 保证至少有 5 位学生是同一专业的，先每种专业选 4 人（不

够 4 人的全选），再加 1。即 4+4+4+4+3+1=20，对应 B 项。【选 B】

【注意】1. 这一类的题目最后都是要加 1 的，C 项+1=B 项，有可能 C 项是只加了人数忘记“+1”的。

2. 最不利构造难度高一点的是融合了排列组合的，后面强化练习课中会融合排列组合的考法。

【答案汇总】1-3：DDB



【小结】最值问题：

1. 最值思维：理解思维即可。

（1）特征：至多/少……。

（2）方法：和定，此消彼长（总和是定值，一个多另一个就少）；考虑最极端情况，一定是最极端的情况。

2. 构造数列：

（1）特征：最……最……、排名第几……最……。某个主体最大/小。

（2）方法：构造一个名次；求谁设谁，设 x；反向推其他；加和求解。如果求出 x 是整数，直接选；如果求出 x 是小数，问最少，向上取整。问最多，向下取整。

3. 最不利构造：

（1）特征：至少……保证。

（2）方法：最坏的情况+1。最坏的情况是没有满足要求、最倒霉的情况。

课后检测

1.（2018 江苏）小李为办公室购买了红、黄、蓝三种颜色的笔若干支，共花费 40.6 元。已知红色笔单价为 1.7 元、黄色笔为 3 元、蓝色笔为 4 元，则小李买的笔总数最多是：

A. 19 支　　　　B. 20 支

C. 21 支　　　　D. 22 支

【解析】1. 需要用到一点前面的知识，告诉了总钱数和三种笔的钱数，类似于不定方程，但是只有一个等量关系，三个未知只能列出一个方程，所以要用最值的思维。红笔单价是 1.7、黄笔单价是 3、蓝笔单价是 4，最后钱数 40.6，这个小数一定是来自于红笔，尾数 7*（尾数 8）=尾数 6，即红笔可以是 8 支、18 支……，不可能是 28 支，选项最多也就是 22 支。要让总笔数最多，钱数是固定的，则一定是最便宜的红笔买的越多越好，即红笔买 18 支，1.7*18=30.6，剩下 40.6-30.6=10 元买黄笔、蓝笔，即买 2 支黄笔，1 支蓝笔，一共 18+2+1=21 支，对应 C 项。【选 C】

2.（2014 国考）某连锁企业在 10 个城市共有 100 家专卖店，每个城市的专卖店数量都不同。如果专卖店数量排名第 5 多的城市有 12 家专卖店，那么专卖店数量排名最后的城市，最多有几家专卖店：

A. 2　　　　B. 3

C. 4　　　　D. 5

【解析】2. 按照城市有的专卖店数量从高到低排序，第 1 名～第 10 名。设第 10 名为 x，第 5 名有 12 家，要让第 10 名最多，其他都要尽可能少，则第 9 名最少为 x+1，第 8 名最少为 x+2，第 7 名最少为 x+3，第 6 名最少为 x+4，第 4 名比第 5 名多，第 4 名最少为 13，第 3 名为 14，第 2 名为 15，第 1 名为 16。14*5+（x+2）*5=100，解得 x=4。验证：第 6 名为 x+4=8，第 5 名＞第 6 名，满足。对应 C 项。【选 C】

1　2　3　4 > 5　6　7　8　9 > 10

16　15　14　13 > 12　x+4　x+3　x+2　x+1　x

3.（2019 国考）从 A 市到 B 市的机票如果打 6 折，包含接送机出租车交通费 90 元、机票税费 60 元在内的总乘机成本是机票打 4 折时总乘机成本的 1.4 倍。问从 A 市到 B 市的全价机票价格（不含税费）为多少元？

A. 1200　　B. 1250

C. 1500　　D. 1600

【解析】3. 计算量很小，长难句圈关键词理解，有一个等量关系（1.4 倍），设从 A 市到 B 市的全价机票价格为 x 元，列式：0.6x+90+60=1.4*（0.4x+90+60），0.04x=（1.4-1）*150，解得 x=60/0.04=1500，对应 C 项。**【选 C】**

【注意】税费不打折。

【注意】1. 预习范围：第八节：容斥原理，高中讲过的题型，依赖公式，相对来说难度低一点；第九节：排列组合与概率，相对来说难度大一点。

2. 1.01^{365}=37.8，0.99^{365}=0.03。每天都比之前提高一点，日积月累，最后会得到很大的成果；如果每天偷懒一点，最后会变得非常差。

2. 预习要求：原则上要做完每个章节至少 50%的题目。实在不会做的话，对每节前几题要有充分的思考，熟悉题型和题意。

【答案汇总】第六节经济利润问题：基础经济 1-5：BABDB；分段计费 1-2：BC；函数最值 1-3：BCC

第七节最值问题：最值思维 1-3：BAD；构造数列 1-4：DBBB；最不利构造 1-3：DDB

遇见不一样的自己

Be your better self