教师考试学科知识点汇编

第一节 小学数学

考点·四舍五入法

求近似数，看尾数最高位上的数是几，比 5 小就舍去，是 5 或大于 5 舍去尾数向前一位进

1. 已知近似数求原数，最大原数用"舍"，最小原数用"入"。

例题. 一个两位小数取近似数后是5.8，这个两位小数最大是_____，最小是_____.

例题.【答案】5.84；5.75．解析：要考虑5.8是一个两位小数的近似数，有两种情况："四舍"得到的5.8最大的是5.84，"五入"得到的5.8最小的是5.75．

考点·因数和倍数

如果数 a 能被数 b（$b\neq0$）整除，a 就叫做 b 的倍数，b 就叫做 a 的因数（或 a 的约数）；倍数和因数是相互依存的；一个数的因数的个数是有限的，其中最小的因数是 1，最大的因数是它本身；一个数的倍数的个数是无限的，其中最小的倍数是它本身.

考点·最大公因数和最小公倍数

（1）最大公因数：几个数公有的因数，叫做这几个数的公因数．其中最大的一个，叫做这几个数的最大公因数．如果两个数是互质数，那么这两个数的最大公因数是 1.

（2）最大公因数的性质

几个数都除以它们的最大公因数，所得的几个商是互质数；

几个数的公因数，都是这几个数的最大公因数的因数；

几个数都乘以一个自然数 n，所得的积的最大公因数等于这几个数的最大公因数乘以 n.

（3）最小公倍数：几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数，其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数．如果两个数是互质数，那么这两个数的积就是它们的最小公倍数.

（4）最小公倍数的性质

几个数的最小公倍数分别除以它们，所得的几个商是互质数；

几个数的公倍数，都是这几个数的最小公倍数的倍数；

几个数都乘以一个自然数 n，所得的积的最小公倍数等于这几个数的最小共倍数乘以 n.

最大公因数的性质与最小公倍数的性质对应记忆。

例题 1．已知 N 是 1，2，3，4，...，2016，2017，2018 这 2018 个数的最小公倍数，那么 N 等于（　　）个 2 与一个奇数的连乘积.

A．8　　B．10

C．1009　　D．1024

例题 1.【答案】B．解析：由题意可知，1，2，3，4...，2016，2017，2018 这 2018 个数的最小公倍数肯定是 2 的整数次方的倍数，由于 $2^{10}=1024<2018, 2^{11}=2048>2018$，所以 N 应为 2^{10} 与一个奇数的乘积，故选 B.

例题 2．某条道路种植了一排树木，每两棵树间隔 35 米，共有 21 棵，现临时要求将树木的间隔缩短为 25 米，那么有（　　）棵树无需移动.

A．2　　B．3
C．4　　D．5

例题 2.【答案】D．解析：这条道路的长为$35\times(21-1)=700$，不需要移动的树为 25 和 35 的最小公倍数，最小公倍数为 175，则有$\frac{700}{175}+1=5$，故选 D.

考点·奇数和偶数

自然数按能否被 2 整除的特征可分为奇数和偶数；能被 2 整除的数叫做偶数；0 也是偶数；不能被 2 整除的数叫做奇数.

可用具体数据代入帮助记忆

奇数与偶数的运算性质

性质 1：偶数±偶数＝偶数，奇数±奇数＝偶数

性质 2：偶数±奇数＝奇数

性质 3：偶数个奇数的和或差是偶数

性质 4：奇数个奇数的和或差是奇数

性质 5：偶数×奇数＝偶数，奇数×奇数＝奇数，偶数×偶数＝偶数

例题．从 0、1、2、. . . 9 这 10 个数中，所有的奇数和为（　　）.

A．25　　B．35
C．45　　D．40

例题.【答案】A．解析：奇数和=1+3+5+7+9=25.

考点·质数与合数

关于100以内的质数就是去掉2,3,5,7的倍数而保留2,3,5,7本身再去掉1。

一个数，如果只有 1 和它本身两个约数，这样的数叫做质数（或素数），100 以内的质数有：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97；一个数，如果除了 1 和它本身还有别的约数，这样的数叫做合数；1 不是质数也不是合数，非零自然数除了 1 外，不是质数就是合数.

例题 1．从 1、2、3……9 这 9 个数中，所有的质数的和是（　　）.

A．17　　B．18
C．20　　D．21

例题 1.【答案】A．解析：这组数据中质数为 2、3、5、7，所以质数和为 2+3+5+7=17.

例题 2．最小的质数与最小的合数和的倒数是_____.

例题 2.【答案】$\frac{1}{6}$．解析：最小的质数是 2，最小的合数是 4，它们的和是 6，倒数是$\frac{1}{6}$.

例题 3．连续 9 个自然数中，最多能有_____个质数.

例题 3.【答案】4．解析：连续 9 个自然数中，最多由 4 个质数（素数）.

考点·倒数

真分数的倒数为假分数；假分数的倒数为真分数。

乘积是 1 的两个数互为倒数；求一个数（0 除外）的倒数，只要把这个数的分子、分母调换位置；1 的倒数是 1，0 没有倒数.

例题．下列说法正确的是（　　）.

A．24÷3＝8，24 是倍数，3 是因数

B．假分数的倒数一定小于 1

C．自然数不是质数，就是合数

D．正数大于 0，负数小于 0

例题．【答案】D．解析：A．倍数和因数不能单独来说，所以错误．B．等于 1 的假分数的倒数等于 1，所以错误．C．自然数 1 既不是质数，也不是合数，所以错误．D 正确．

考点·基本运算

（1）第一级运算：加法和减法叫做第一级运算．

加数＋加数＝和；被减数－减数＝差．

（2）第二级运算：乘法和除法叫做第二级运算．

被乘数×乘数＝积；被除数÷除数＝商……余数．

（3）减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算．

考点·运算顺序

（1）没有括号的混合运算：同级运算从左往右依次运算；两级运算先算乘除法，后算加减法．

（2）有括号的混合运算：先算小括号里面的，再算中括号里面的，最后算括号外面的．

考点·运算定律（简便计算）

（1）加法交换律

两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变，即 $a+b=b+a$．

（2）加法结合律

三个数相加，先把前两个数相加，再加上第三个数；或者先把后两个数相加，再和第一个数相加，它们的和不变，即 $(a+b)+c=a+(b+c)$．

乘法交换律与乘法结合律可对比加法交换律与加法结合律的形式进行记忆。

（3）乘法交换律

两个数相乘，交换因数的位置它们的积不变，即 $a\times b=b\times a$．

（4）乘法结合律

三个数相乘，先把前两个数相乘，再乘第三个数；或者先把后两个数相乘，再和第一个数相乘，它们的积不变，即 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$．

（5）乘法分配律

两个数的和与一个数相乘，可以把两个加数分别与这个数相乘再把两个积相加，即 $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$．（反过来就是提取公因数）

括号的应用

（6）减法的性质

从一个数里连续减去几个数，可以从这个数里减去所有减数的和，差不变，即 $a-b-c=a-(b+c)$．

拓展：$a-b-c=a-c-b$，$a-b+c=a+c-b$，$a+(b-c)=a+b-c$；$a-(b+c)=a-b-c$；$a-(b-c)=a-b+c$；$a+b-c=a+(b-c)$；$a-b+c=a-(b-c)$，其中 a,b,c 各表示一个数．

上面的这些运算律，既可以从左到右顺着用，又可以从右到左逆着用．

实际上是运算定律的应用。

考点·加减法中的速算与巧算

（1）凑整法

凑整法就是将算式中的数分成若干组，使每组的运算结果都是整十、整百、整千……的数，再将各组的结果相加．

①移位凑整法．先把加在一起为整十、整百、整千……的数相加，然后再与其他的数相加．

②借数凑整法．有些算式中直接凑整不明显，这时可“借数”或“拆数”凑整．

③分组凑整法．把几个互为“补数”的减数先加起来，再从被减数中减去，或先减去那些与被减数有相同尾数的减数．其中“补数”就是两个数相加，如果恰好凑成整十、整百、整千……，就把其中的一个数叫做另一个数的“补数”．

（2）找“基准数”法：

当几个数比较接近于某一整数的数相加时，选这个整数为“基准数”（要注意把多加的数减去，把少加的数加上）．

考点·乘法凑整（与乘法相关运算定律相关）

思想核心：先把能凑成整十、整百、整千……的几个乘数结合在一起，最后再与前面的数相乘，使得运算简便．

理论依据：

乘法交换率：$a\times b=b\times a$

乘法结合率：$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

乘法分配率：$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

积不变规律：$a\times b=(a\times c)\times(b\div c)=(a\div c)\times(b\times c)$

常见凑整：$4\times25=100$，$8\times125=1000$，$5\times20=100$，$12345679\times9=111111111$（去 8 数，重点记忆）．$7\times11\times13=1001$（三个常用质数的乘积，重点记忆）．

考点·提取公因数（用途：简便计算；整式化简、解方程）

思想核心：当一个算式中，每个乘法的运算部分中都有相同的因数时，我们可以逆用乘法分配律，将这个相同的数提到括号外面，然后先计算括号内的数的加减运算，凑整后再与外面的数相乘，使得运算简便．理论依据：$a\times x\pm b\times x\pm c\times x=(a\pm b\pm c)\times x$

考点·乘、除法混合运算的性质

（1）在乘、除混合运算中，被乘数、乘数或除数可以连同运算符号一起交换位置（即带着符号搬家）．

（2）在乘、除混合运算中，去掉或添加括号的规则

（3）两个数之积除以两个数之积，可以分别相除后再相乘．

考点·要注意添括号或者去括号对运算符号的影响

加、乘不变，乘注意；减、除都变，除注意．

（1）在“+”号后面添括号或者去括号，括号内的“+”、“−”号都不变；

（2）在“−”号后面添括号或者去括号，括号内的“+”、“−”号都改变，其中“+”号变成“−”号，“−”号变成“+”号；

（3）在“×”号后面添括号或者去括号，括号内的“×”、“÷”号都不变，但此时括号内不能有加减运算，只能有乘除运算；

（4）在“÷”号后面添括号或者去括号，括号内的“×”、“÷”号都改变，其中“×”号变成“÷”号，“÷”号变成“×”号，但此时括号内不能有加减运算，只能有乘除运算．

考点·分数与小数混合运算的技巧

技巧 1：一般情况下，在加、减法中，分数化成小数比较方便.

技巧 2：在加、减法中，有时遇到分数只能化成循环小数时，就不能把分数化成小数．此时要将包括循环小数在内的所有小数都化为分数.

技巧 3：在乘、除法中，一般情况下，小数化成分数计算，则比较简便．依据分数与除法的关系

技巧 4：在运算中，使用假分数还是带分数，需视情况而定.

技巧 5：在计算中经常用到除法、比、分数、小数、百分数相互之间的互化，把这些常用数的互化形成表格记忆对学习非常重要.

例题．脱式计算（能简算的要简算，并写出每一步计算得理由）

$$1\frac{2}{3}-\left[\left(3.62\times\frac{2}{15}+6.38\div7\frac{1}{2}\right)\times1.82-1\frac{1}{3}\times0.82\right]$$

例题．【答案】$\frac{1}{3}$.

解析：$1\frac{2}{3}-\left[\left(3.62\times\frac{2}{15}+6.38\div7\frac{1}{2}\right)\times1.82-1\frac{1}{3}\times0.82\right]$

$=1\frac{2}{3}-\left[\left(3.62\times\frac{2}{15}+6.38\times\frac{2}{15}\right)\times1.82-1\frac{1}{3}\times0.82\right]$（除以一个数等于乘它的倒数）

$=1\frac{2}{3}-\left[(3.62+6.38)\times\frac{2}{15}\times1.82-1\frac{1}{3}\times0.82\right]$（分配律）

$=1\frac{2}{3}-\left[1\frac{1}{3}\times1.82-1\frac{1}{3}\times0.82\right]$（求和并约分）

$=1\frac{2}{3}-1\frac{1}{3}\times(1.82-0.82)$（分配律）

$=\frac{1}{3}$

$15\div10=15:10=\frac{3}{2}$

前项　后项　比值

考点·比与比例

1．比的意义：两个数相除又叫做两个数的比．同除法比较，比的前项相当于被除数，后项相当于除数，比值相当于商．前后单位一致

2．比例尺：（1）数值比例尺：图上距离：实际距离=比例尺；（2）线段比例尺：在图上附有一条注有数目的线段，用来表示和地面上相对应的实际距离.

扩大比例尺
缩小比例尺

3．比例的意义：表示两个比相等的式子叫做比例.

$2.4:1.6=60:40$

内项　外项

组成比例的四个数，叫做比例的项．两端的两项叫做外项，中间的两项叫做内项.

4．正比例和反比例：两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两种量中相对应的两个数的比值（也就是商）一定，这两种量就叫做成正比例的量，它们的关系叫做正

图象 {正比例关系可以用一条直线来表示
反比例关系可以用光滑的曲线表示

比例关系，用字母表示 $y/x=k$（一定）；如果这两种量中相对应的两个数的积一定，这两种量就叫做成反比例的量，它们的关系叫做反比例关系，用字母表示 $x\times y=k$（一定）.

例题 1．$10:12=x:30$，则 x 的值是（　　）.

A．24　　B．25

C．26　　D．27

例题 1.【答案】B. 解析：根据比例的性质，内项之积等于外项之积，所以 12x=300，得 x=25，故选 B.

例题 2．下列叙述中，正确的是（　　）.

A．比例尺是一种尺子　是一个比例

B．图上距离和实际距离的比，叫作比例尺

C．由于图纸上的图上距离小于实际距离，所以比例尺小于 1

D．以上都不对

该选择为易错选项，在制作精细零件时常用扩大比例尺。

例题 2.【答案】B．解析：比例尺是一个比例，不是尺子也不是一个数值；比例尺=图上距离：实际距离；比例尺可以放大或者缩小．所以选 B.

例题 3．在标有“ 0　80　160km ”的地图上，1cm 表示的实际距离是（　　）.

A．80cm　　B．160cm

C．80km　　D．160km

例题 3．【答案】C．解析：一般线段比例尺中，每一小段表示图上 1 厘米，对应上面的数据表示实际距离．即 1cm 表示的实际距离为 80km，故选：C.

考点·面积和体积

1．平面图形

（1）长方形：$S=ab$.

（2）正方形：$S=a^2$.

（3）三角形：$S=\frac{ah}{2}$.

（4）平行四边形：$S=ah$.

（5）梯形：$S=\frac{(a+b)h}{2}$.　(上底+下底)×高÷2

（6）圆：$S=\pi r^2$.　r为半径

（7）扇形：$S=\frac{n\pi r^2}{360}$.

（8）环形：$S=\pi(R^2-r^2)$.　R为大圆半径

（9）弓形：一般来说，弓形面积＝扇形面积－三角形面积（除了半圆）.

（10）“弯角”：如图：  　“弯角”的面积＝正方形面积－扇形面积.

（11）“谷子”：如图：  　“谷子”的面积＝弓形面积×2.

可用两个弓形的面积来表示

2．立体图形

（1）长方体：$S=2(ab+ah+bh)$，$V=Sh$，$V=abh$.

（2）正方体：$S_{表}=6a^2$，$V=a^3$.

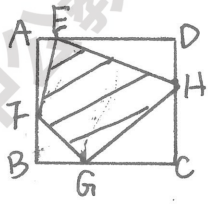
（3）圆柱：$S_{侧}=ch$，$S_{表}=S_{侧}+S_{底}\times 2$，$V=Sh$.

（4）圆锥：$V=\frac{Sh}{3}$.　　$V_{圆锥}=\frac{1}{3}V_{圆柱}$

3．常用的思想方法

转化思想（复杂转化为简单，不熟悉的转化为熟悉的）；等积变形（割补、平移、旋转等）；借来还去（加减法）；外围入手（从会求的图形或者能求的图形入手，看与要求的部分之间的“关系”）.

例题 1．如下图所示，$AF=7cm$，$DH=4cm$，$BG=5cm$，$AE=1cm$．若正方形 $ABCD$ 内的四边形 $EFGH$ 的面积为 $78cm^2$．则正方形的边长为（　　）cm.



A．10　　B．11

C．12　　D．13

例题 1.【答案】C．解析：连接 GE，得到两个直角梯形，设正方形边长为 x，根据题意得 $(1+5)x\div 2+(x-1+x-5)x\div 2-[1\times 7\div 2+(x-7)\times 5\div 2+(x-5)(x-4)\div 2+(x-1)\times 4\div 2]=78$，整理得 $\frac{1}{2}x^2=72$，解得 $x=12$，故选 C.

例题 2．小正方形和大正方形边长比是 $9:11$，小正方形和大正方形面积比（　　）.

A．81:110　　B．101:121

C．81:121　　D．101:110

已知边长比，求面积比，注意平方。

例题 2.【答案】C．解析：面积比等于边长平方的比 $9^2:11^2=81:121$.

例题 3．一个平行四边形的底是 10 厘米，高是 8 厘米，如果把它的底和高都扩大 3 倍，那么它的面积扩大了（　　）倍.

注意审题仔细

A．3　　B．6

C．9　　D．12

例题 3.【答案】C．解析:．对于平行四边形来说，底扩大 a 倍，高扩大 b 倍，面积扩大 ab 倍，故选 C.　$3\times 3=9$

例题 4．如果梯形面积是 90 平方米，高是 30 米，则它的上下底之和是（　　）米.

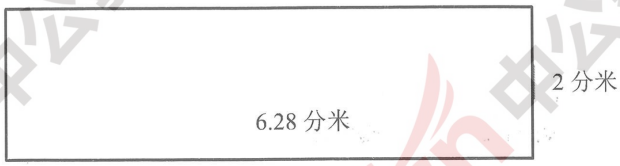
A．6　　B．3

C．60　　D．30

$S=\frac{(a+b)\times h}{2}$

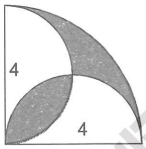
例题 4.【答案】A．解析：根据梯形的面积公式得，$90\times 2\div 30=6$，故选 A.

例题 5．把如图所示的长方形铁皮卷成一个深 2 分米的圆柱形小铁桶，铁桶的底面直径是_____分米，加上底面后铁桶的容积是_____升.（长：6.28 分米，高 2 分米）



例题 5.【答案】2；6.28．解析：铁桶的底面周长即长方形的长 6.28 分米，则直径为 2 分米，半径为 1 分米，铁桶的容积为 $3.14\times1^2\times2=6.28$（升）．

例题 6．求图中阴影部分的面积．（圆周率取 3.14）．



例题 6.【答案】4.56．

解析：可将左下橄榄型的阴影部分剖开，两部分分别顺逆时针 90°，则阴影部分转化为四分之一圆减去一个等腰直角三角形，所以阴影部分的面积为 $\frac{1}{4}\times\pi\times4^2-\frac{1}{2}\times4\times4=4.56$．

考点·相遇问题

数量关系：相遇时间＝总路程÷（甲速＋乙速）　相遇时间=总路程÷速度和

总路程＝（甲速＋乙速）×相遇时间

解题思路和方法：简单的题目可直接利用公式，复杂的题目变通后再利用公式．

例题 1．甲车从 A 地到 B 地需行 6 时，乙车从 B 地到 A 地需行 10 时，现甲乙辆车分别从 AB 两地出发相向而行，相遇时甲车比乙车多行驶 90 千米，A、B 两地相距（　　）千米．

A．900　　B．540

C．360　　D．180

例题 1.【答案】C．解析：令 AB 相距 1，则甲速度为 $\frac{1}{6}$，乙的速度为 $\frac{1}{10}$，甲比乙快 $\frac{1}{15}$，两者速度和为 $\frac{4}{15}$，故两者相遇时已经行驶了 $\frac{15}{4}$ 小时，实际上甲车比乙车快 $90\div\frac{15}{4}=24$，所以 AB 相距 $24\div\frac{1}{15}=360$，故选 C．

例题 2．甲汽车从 A 地开往 B 地，每小时 88 公里，乙汽车从 B 地开往 A 地，每小时 112 公里，两车在距离中点 36 公里处相遇，求 AB 两地的距离是（　　）公里．

A．200　　B．400

C．360　　D．600

例题 2.【答案】D．解析：乙汽车比甲汽车行驶的快，所以乙汽车比甲汽车多行驶 $36\times2=72$ 公里，则行驶时间 $t=\frac{S_乙-S_甲}{V_乙-V_甲}=\frac{72}{112-88}=3$ 小时，AB 两地的距离：s=(112+88)×3=600 公里，故选 D．

例题 3．两辆汽车从两地同时出发，相向而行．已知甲车行完全程比乙车多用 1.5 小时，甲车每小时行 40 千米，乙车每小时行 50 千米，出发后_____小时两车相遇．

例题 3.【答案】$3\frac{1}{3}$．解析：$1.5\div\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{50}\right)=300$（千米），$300\div(40+50)=3\frac{1}{3}$（小时）．

考点·追及问题

与相遇问题对比记忆，借助图理解。

数量关系：追及时间＝追及路程÷（快速－慢速）

追及路程＝（快速－慢速）×追及时间

例题．一件商品先涨价 5%后又降价 5%，（　　）．

A．现价比原价低　　B．现价比原价高

C．现价和原价一样　　D．无法确定

例题．【答案】A．解析：设原价是 100 元，涨价 5%是：$100\times(1+5\%)=105$（元），又降价 5%得：$105\times(1-5\%)=99.75$ 元，$99.75<100$，则现价比原价低，故选 A．

考点·植树问题

注意场地形状与端点是否植树。

数量关系：线形植树棵数＝距离÷棵距＋1

环形植树棵数＝距离÷棵距

方形植树棵数＝距离÷棵距－4（注：端点不植树）

三角形植树棵数＝距离÷棵距－3（注：端点不植树）

面积植树棵数＝面积÷（棵距×行距）

解题思路和方法：先弄清楚植树问题的类型，然后可以利用公式．

例题 1．广场上的大钟 4 时敲 4 下，要 12 秒，9 时敲 9 下，用（　　）秒．

A．3　　B．27

C．32　　D．36

例题 1.【答案】C．解析：敲 4 下，要经历 4-1=3 个间隔，那么每个间隔所经历的时间是：12÷3=4（秒），∴敲 9 下需要的时间是：（9-1）×4=32（秒）

例题 2．王亮要把一封特快邮件送到五楼李奶奶家，如果相邻两层之间有 26 个台阶，那么王亮从一楼到五楼一共要走（　　）个台阶．

A．78　　B．91

C．104　　D．130

例题 2.【答案】C．解析：从 1 楼到 5 楼之间有 4 个空隙，每个空隙的台阶是 26 个，所以共走 104 个台阶．

考点·年龄问题

数量关系：年龄问题往往与和差，和倍，差倍问题有着密切联系，尤其与差倍问题的解题思路是一致的，要紧紧抓住“年龄差不变”这个特点．

解题思路和方法：可以利用“差倍问题”的解题思路和方法．

考点·行船问题

注意考虑水本身的速度。画图理解。

数量关系：（顺水速度＋逆水速度）÷2＝船速

（顺水速度－逆水速度）÷2＝水速

顺水速＝船速×2－逆水速＝逆水速＋水速×2

逆水速＝船速×2－顺水速＝顺水速－水速×2

解题思路和方法：大多数情况可以直接利用数量关系的公式.

考点·列车问题

（1）列车过桥（隧道）

列车车长＋桥（隧道）长度（总路程）＝列车速度×通过的时间

（2）列车＋树（电线杆）

列车车长（总路程）＝列车速度×通过时间

（3）列车＋列车

错车问题：相当于相遇问题

快车车长＋慢车车长（总路程）＝（快车速度＋慢车速度）×错车时间

超车问题：相当于追及问题

快车车长＋慢车车长（总路程）＝（快车速度—慢车速度）×错车时间

注意：①所过物体是否有长度；②所过物体是否有速度。

例题．一列高速列车和一列普通列车的车身分别为 400 米和 600 米，它们相向匀速行驶在平行的轨道上，若坐在高速列车的乘客看见普通列车驶过窗口的时间是 3 秒，则坐在普通列车上的乘客看见高速列车驶过窗口的时间是（　　）.

A．2 秒　　B．3 秒

C．4 秒　　D．4.5 秒

例题．【答案】A．解析：两车的相对速度是每秒 200 米．所以 400÷200=2（秒）.

考点·时钟问题

数量关系：分针的速度是时针的 12 倍，

通常按追及问题来对待，也可以按差倍问题来计算.

解题思路和方法：变通为“追及问题”后可以直接利用公式.

注意是正常钟表还是“怪钟”。

考点·工程问题

工作量＝工作效率×工作时间

工作时间＝工作量÷工作效率

合作：工作时间＝总工作量÷（甲工作效率＋乙工作效率）

解题思路和方法：变通后可以利用上述数量关系的公式.

例题．甲、乙、丙三人生产一批玩具，甲生产的个数是乙、丙二人生产个数之和的$\frac{1}{2}$，乙生产的个数是甲、丙两人生产个数之和的$\frac{1}{3}$，丙生产了 50 个．这批玩具共有_____个.

例题．【答案】120 个．解析：如果直接研究甲、乙、丙三者之间的关系，可能会略显复杂，我们需要引入一个中间量：甲乙丙三人生产玩具数量的总和．甲是乙丙和的$\frac{1}{2}$，则总和分为 3 份，甲占了 1 份，甲占总数的$\frac{1}{3}$；乙是甲丙和的$\frac{1}{3}$，同理可知乙占了总数的$\frac{1}{4}$，那么可知丙生产的玩具占总数的$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$，所以总数是$50\div\frac{5}{12}=120$（个）.

考点·鸡兔同笼问题 一般使用假设法或列方程形式解答.

数量关系：第一鸡兔同笼问题

假设全都是鸡，则有：兔数＝（实际脚数－2×鸡兔总数）÷（4－2）

假设全都是兔，则有：鸡数＝（4×鸡兔总数－实际脚数）÷（4－2）

第二鸡兔同笼问题

假设全都是鸡，则有兔数＝（2×鸡兔总数－鸡与兔脚之差）÷（4＋2）

假设全都是兔，则有鸡数＝（4×鸡兔总数＋鸡与兔脚之差）÷（4＋2）

解题思路和方法：解答此类题目一般都用假设法，可以先假设都是鸡，也可以假设都是兔．如果先假设都是鸡，然后以兔换鸡；如果先假设都是兔，然后以鸡换兔．这类问题也叫置换问题．通过先假设，再置换，使问题得到解决．

例题 1．学校举行“趣味数学”竞赛共 20 道题，评分标准是：每做对一题得 5 分，每做错或不做一题倒扣 1 分；小明参加了这次竞赛得到 82 分，则小明分别做对了几道题？做错或不做的有几道题？

此问题使用假设法，且假设全做对更快捷

例题 1．【答案】17，3．解析：假设全做对，20×5=100，实际 82 分，说明有做错的，100-82=18，每错一道少 6 分，少了 18 分，所以错了 18÷6=3 道，做对了 20-3=17 道．

例题 2．鸡与兔共有 100 只，鸡的脚比兔的脚多 80 只，问鸡与兔各多少只？

例题 2．【答案】鸡有 80 只，兔有 20 只．

解析：兔：（2×100-80）÷（2+4）=20（只），鸡：100-20=80（只），则鸡有 80 只，兔有 20 只．

考点·商品利润问题

数量关系：利润＝售价－进货价

利润率＝（售价－进货价）÷进货价×100%

售价＝进货价×（1＋利润率）

亏损＝进货价－售价

亏损率＝（进货价－售价）÷进货价×100%

解题思路和方法：简单的题目可以直接利用公式，复杂的题目变通后利用公式．

例题 1．一条裙子标价 230 元，在甲店打五折出售，在乙店按“满 100 元减 50 元”的方式出售．比较这条裙子在两店的售价，结果是（　　）．

A．甲店便宜　　B．乙店便宜

C．售价一样　　D．无法确定

例题 1．【答案】A．解析：在甲店：230×50%=115（元），在乙店，230－50×2=130（元），所以甲店便宜．

五折=50%．售价=标价×折扣

例题 2．某商店用 2400 元买进一批货物，如果全用每个 6 元的价格卖出，可得利润 25%，实际上一部分货物因质量问题，只能降价以每个 5 元的价格卖出，因此得利润 20%，这些货物中，以 6 元的价格卖出的合格品是多少个？

例题 2．【答案】380 个．

解析：如果全以 6 元的价格卖出，可得 2400×（1+25%）=3000 元，

则货物共有 3000÷6=500 个．实际总售价为 2400×（1+20%）=2880 元，

以 5 元卖出的有（3000-2880）÷（6-5）=120 个，

则以每个 6 元的价格卖出的有 500-120=380 个.

第二节　初中数学

考点·整式的运算

1．幂的运算性质：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；$(a^m)^n = a^{mn}$；$a^m \div a^n = a^{m-n}$；$(ab)^n = a^n b^n$．

2．乘法公式

注意幂的积与幂的乘方的区别。

（1）$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$．

（2）$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$．

（3）$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$．

（4）$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$．

3．整式的除法

（1）单项式除以单项式的法则：把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式；对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数一起作为商的一个因式．

（2）多项式除以单项式的法则：先把这个多项式的每一项分别除以单项式，再把所得的商相加．

例题 1．下列计算正确的是（　　）．

A．$2x^2 - 4x^2 = -2$　　B．$3x + x = 3x^2$

C．$3x \cdot x = 3x^2$　　D．$4x^6 \div 2x^2 = 2x^3$

同底数幂相除，底数不变，指数相减。

例题 1.【答案】C．解析：A．$2x^2 - 4x^2 = -2x^2$，错误．B．$3x + x = 4x$，错误．C．$3x \cdot x = 3x^2$，正确．D．$4x^6 \div 2x^2 = 2x^4$，错误．故选：C．

例题 2．下列运算正确的是（　　）．

A．$(a^2 + 2b^2) - 2(-a^2 + b^2) = 3a^2 + b^2$　　B．$\frac{a^2+1}{a-1} - a - 1 = \frac{2a}{a-1}$

C．$(-a)^{3m} \div a^m = (-1)^m a^{2m}$　　D．$6x^2 - 5x - 1 = (2x-1)(3x-1)$

例题 2．【答案】C．解析：A 项应等于 $3a^2$；B 项应等于 $\frac{2}{a-1}$；D 项应等于 $(6x+1)(x-1)$．

例题 3．下列计算正确的是（　　）．

A．$a^2 + a^3 = a^5$　　B．$3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 1$

C．$(x^2)^3 = x^5$　　D．$m^5 \div m^3 = m^2$

幂的乘方，底数不变，指数相乘。

例题 3.【答案】D．解析：A、a^2 与 a^3 不是同类项，无法计算，故此选项错误；B、$3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$，故此选项错误；C、$(x^2)^3 = x^6$，故此选项错误；D、$m^5 \div m^3 = m^2$，正确．故选 D．

考点·因式分解

1．因式分解的方法：（1）提取公因式法；（2）公式法；（3）十字相乘法；（4）分组分解法．

2．提公因式法：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$．

3．公式法

（1）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$．

（2）$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$．

（3）$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$．

4．十字相乘法：$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$．

例题 1．下列等式从左到右的变形，属于因式分解的是（　　）．

A．$x^2+2x-1=(x-1)^2$　　B．$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

C．$x^2+4x+4=(x+2)^2$　　D．$ax^2-a=a(x^2-1)$

提出系数后，再看能否继续进行因式分解！

例题 1.【答案】C．解析：A．$x^2+2x-1=(x+1)^2-2$，故 A 不是因式分解；B．是整式的乘法，故 B 不是因式分解；C．是因式分解；D．$ax^2-a=a(x^2-1)=a(x-1)(x+1)$，故 D 分解不完全．故选 C．

对于因式分解的选择题也可以逐项从等式右边展开，进行验证和排除。

例题 2．因式分解 x^2+ax+b，甲看错了 a 的值，分解的结果是 $(x+6)(x-2)$，乙看错了 b 的值，分解的结果为 $(x-8)(x+4)$，那么 x^2+ax+b 分解因式正确的结果为（　　）．

A．$(x+3)(x-4)$　　B．$(x+4)(x-3)$

C．$(x+6)(x-2)$　　D．$(x+2)(x-6)$

例题 2.【答案】D．解析：甲看错了 a 的值：$x^2+ax+b=(x+6)(x-2)=x^2+4x-12$，

$\therefore b=-12$，乙看错了 b 的值：$x^2+ax+b=(x-8)(x+4)=x^2-4x-32$，$\therefore$

$a=-4$，$\therefore x^2+ax+b$ 分解因式正确的结果：$x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$．故选 D．

例题 3．分解因式：$m^3n-6m^2n+9mn=$_____．

例题 3.【答案】$mn(m-3)^2$．

解析：$m^3n-6m^2n+9mn=mn(m^2-6m+9)=mn(m-3)^2$．

考点 • 二次根式

被开方数 $a\geq 0$.

1．二次根式的有关概念

（1）二次根式：式子 $\sqrt{a}(a\geq 0)$ 叫做二次根式．注意被开方数 a 只能是非负数．并且根式 $\sqrt{a}$ 也是非负数．

（2）最简二次根式：被开方数不含分母，不含能开得尽方的因数或因式，这样的二次根式，叫做最简二次根式．

（3）同类二次根式：化成最简二次根式后，被开方数相同的几个二次根式，叫做同类二次根式．

2．二次根式的性质

（1）$\sqrt{a}\geq 0(a\geq 0)$．

（2）$(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$．

（3）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$．

（4）$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geq 0,b\geq 0)$．

（5）$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geq 0,b>0)$．

3．二次根式的运算

（1）二次根式的加减：先把二次根式化为最简二次根式，再合并同类二次根式．

（2）二次根式的乘除：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geq 0,b\geq 0)$；$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}(a\geq 0,b>0)$．

（3）二次根式的运算仍满足运算律，也可以用多项式的乘法公式来简化运算．二次根式的运算结果一定要化成最简二次根式．

例题 1．已知 $m=1+\sqrt{2}$，$n=1-\sqrt{2}$，则代数式 $\sqrt{m^2+n^2-3mn}$ 的值为（　　）．

A．9　　B．±3

C．3　　D．5

例题 1．【答案】C．解析：

$\sqrt{m^2+n^2-3mn}=\sqrt{(m-n)^2-mn}=\sqrt{(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(-1)}=3$，故选 C．

例题 2．计算 $\sqrt{12}-3\sqrt{\frac{1}{3}}$ 的结果是_____．

例题 2．【答案】$\sqrt{3}$．解析：原式$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$．

考点 • 一元二次方程

1．一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$．

2．解法：直接开平方法；配方法；公式法 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\left(b^2-4ac\geq 0\right)$；因式分解法．

3．根的判别式：通常用“Δ”来表示，即 $\Delta=b^2-4ac$．

$\begin{cases}\Delta>0，方程有两个不同的实根；\\ \Delta=0，方程有且只有一个实根；\\ \Delta<0，无根。\end{cases}$

4．根与系数的关系：如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$．

对于复杂的一元二次方程，不方便求根时，可利用根与系数的关系，求解．

例题 1．若 a,b 是方程 $x^2+2x-2006=0$ 的两根，则 $a^2+3a+b=$（　　）．

A．2006　　B．2005

C．2004　　D．2002

例题 1．【答案】C．解析：∵a，b 是方程 $x^2+2x-2006=0$ 的两根，∴ $x^2+2x=2006$，$a+b=-2$，所以有 $a^2+3a+b=a^2+2a+a+b=2006-2=2004$．

例题 2．若关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m+2)x=0$ 有两个相等的实数根，则实数 m 的值为（　　）．

A．2　　B．－2

C．－2 或 2　　D．－1 或 3

马上反应 Δ=0，列出关于 m 的方程，求解即可。

例题 2．【答案】B．解析：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m+2)x=0$ 有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=b^2-4ac=(m+2)^2=0$，解得 $m=-2$．故选 B．

例题 3．方程 $2x^2-3x-1=0$ 的两根为 x_1，x_2，则 $x_1^2+x_2^2=$_____．

例题 3．【答案】$\frac{13}{4}$．解析：∵方程 $2x^2-3x-1=0$ 的两根为 x_1，x_2，∴ $x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$x_1x_2=-\frac{1}{2}$，

∴ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}$．故答案为：$\frac{13}{4}$．

考点·不等式

1．不等式的基本性质

（1）若 $a<b$，则 $a+c<b+c$．

（2）若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$（或 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$）．

（3）若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$（或 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$）．

2．一元一次不等式组解集的确定方法（已知 $a<b$）

$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$ 的解集是 $x<a$，即“小小取小”；

$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$ 的解集是 $x>b$，即“大大取大”；

$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$ 的解集是 $a<x<b$，即“大小小大中间找”；

$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$ 的解集是空集，即“大大小小取不了”．

例题 1．关于 x 的不等式组 $\begin{cases}2x-1>5\\x-m<0\end{cases}$ 有三个整数解，则 m 的取值范围是（　　）．

A．$6<m\le 7$　　B．$6<m<7$

C．$m\le 7$　　D．$m<7$

例题 1．【答案】A．解析：$\begin{cases}2x-1>5①\\x-m<0②\end{cases}$，由①得：$x>3$，由②得：$x<m$，则不等式组的解集是：$3<x<m$．不等式组有三个整数解，则整数解是 4，5，6．则 $6<m\le 7$．故选 A．

例题 2．若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x-m<0\\3-2x\le 1\end{cases}$ 恰有 3 个整数解，则 m 的取值范围是_____．

例题 2．【答案】$3<m\le 4$．解析：$\begin{cases}x-m<0①\\3-2x\le 1②\end{cases}$ 解①得：$x<m$，解②得：$x\ge 1$，则不等式组的解集是：$1\le x<m$．不等式组有 3 个整数解，则整数解是 1，2，3．则 $3<m\le 4$．故答案是：$3<m\le 4$．

考点·分式

1．分式的基本性质：分式的分子与分母同乘（或除以）一个不等于零的整式，分式的值不变．用式子表示是 $\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$（其中 M 是不等于 0 的整式）．

2．分式的加减法：同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减，即 $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$．异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，然后相加减，即 $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$．

3．分式的乘除法：分式乘以分式，用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母，即 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$．分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘，即 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$．

4．分式的混合运算：在分式的加减乘除混合运算中，应先算乘除，进行约分化简后，再进行加减运算，遇到有括号的，先算括号里面的．运算结果必须是最简分式或整式．即结果需要约分，需要掌握相对整除性知识点

化简与计算时，需要保持分母一致后才可以进行加减运算

例题 1．化简 $\frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-a}=$_____．

例题 1．【答案】1．解析：此题考查分式的加法运算，分式的加法是把分母变成相同，通过通分把分母变成相同，然后把分子进行相加即可；所以原式 $=\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a-1}=\frac{a-1}{a-1}=1$；故答案为 1．

例题 2．先化简，再求值：$\left(\frac{a^2}{a-3}+\frac{9}{3-a}\right)\div\frac{a+3}{a+2}$，其中 $a=2$．

例题 2．【答案】4．

解析：原式 $=\frac{(a+3)(a-3)}{a-3}\times\frac{a+2}{a+3}=a+2$，当 $a=2$ 时，原式=4．

例题 3．先化简再求值：$\left(\frac{6}{x-1}+\frac{4}{x^2-x}\right)\div\frac{3x+2}{x-1}$，其中 x=2．

例题 3．【答案】$\left(\frac{6}{x-1}+\frac{4}{x^2-x}\right)\div\frac{3x+2}{x-1}=\frac{2}{x}=1$．

(x-1)与(x²-x)通分过程中，找最简公分母，即x(x-1)

解析：$\left(\frac{6}{x-1}+\frac{4}{x^2-x}\right)\div\frac{3x+2}{x-1}=\frac{6x+4}{x(x-1)}\div\frac{3x+2}{x-1}=\frac{2(3x+2)}{x(x-1)}\cdot\frac{x-1}{3x+2}=\frac{2}{x}$，

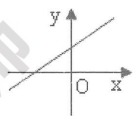
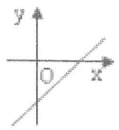
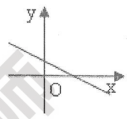
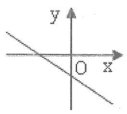
当 x=2 时，原式 $=\frac{2}{2}=1$．

例题 4．计算：$\left[\frac{1}{x+1}+\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\right]\div\frac{x-1}{x+1}$．

例题 4．【答案】$\frac{x}{x-1}$．

解析：$\left[\frac{1}{x+1}+\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\right]\div\frac{x-1}{x+1}=\frac{x-1+x^2-2x+1}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^2-x}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$．

考点 • 一次函数 $y=kx+b$ 的图象与性质

k、b 的符号	$k>0$，$b>0$	$k>0$，$b<0$	$k<0$，$b>0$	$k<0$，$b<0$
图象的大致位置				
经过象限	第一、二、三象限	第一、三、四象限	第一、二、四象限	第二、三、四象限
性质	y 随 x 的增大而增大		y 随 x 的增大而减小	

即：k>0，x↑，y↑；k<0，x↑，y↓

例题 1．已知一次函数的图象过点(3，5)与(-4，-9)，则这个一次函数的解析式为_____．

过两点求直线方程的方法可以为：两点式；点斜式；斜截式等

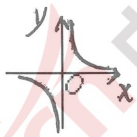
例题 1.【答案】$y=2x-1$．解析：设一次函数的解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}5=3k+b\\-9=-4k+b\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=2\\b=-1\end{cases}$，所以一次函数解析式为 $y=2x-1$．

例题 2．若函数 $y=3x+m$ 与函数 $y=-3x+n$ 交于点（a，16），则 $m+n=$_____．

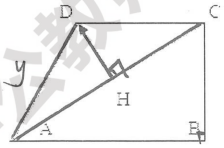
例题 2.【答案】32. 解析：由函数 $y=3x+m$ 与函数 $y=-3x+n$ 交于点 $(a,16)$，$\therefore 3a+m=16$，$-3a+n=16$，两式相加得：$m+n=32$，故答案为 32.

考点•反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与性质

k 的符号	$k>0$	$k<0$
图象的大致位置		
经过象限	第一、第三象限	第二、第四象限
性质	在每一象限内 y 随 x 的增大而减小	在每一象限内 y 随 x 的增大而增大

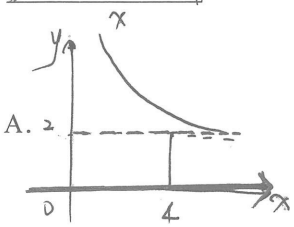
易错点注意，需要说明哪一个象限，而不能一概而论，这是错误的．

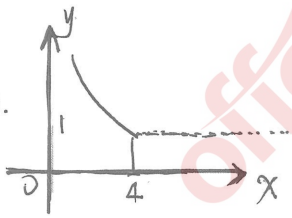
例题 1．在平行四边形 ABCD 中，$\angle B=90^\circ, AC=4$，AB∥CD，DH 垂直平分 AC，点 H 为垂足，设 $AB=x, AD=y$，则 y 关于 x 的函数关系用图像可以表示为（　　）．

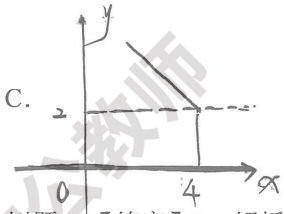


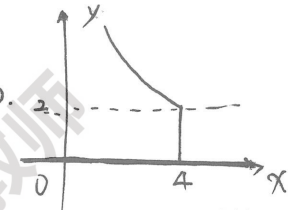
本质：求 y 与 x 的函数解析式，再找图像

手段：全等与相似．

A. 

B. 

C. 

D. 

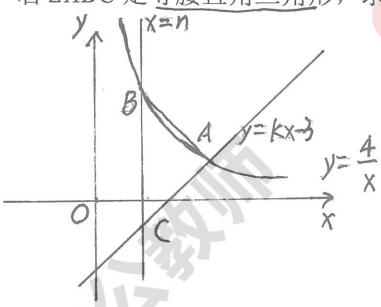
例题 1.【答案】D．解析：由题意知 AH=HC=2，$\angle DHA=\angle DHC=90^\circ$，于是 $\Delta DHA\cong\Delta DHC$，因此 $\angle DCA=\angle DAC$，又因为 AB∥CD，则 $\angle DCA=\angle CAB$，于是 $\angle DAC=\angle CAB$，又 $\angle DHA=\angle CBA=90^\circ$，可知 $\Delta DHA\sim\Delta CBA$，于是 $\frac{AH}{AB}=\frac{DA}{CA}$，得 $\frac{2}{x}=\frac{y}{4}$，即 $y=\frac{8}{x}$，因为 AB<AC，

所以 $x<4$，正确选项为 D.

例题 2．如图，反比例 $y=\frac{4}{x}$ 的图象与一次函数 $y=kx-3$ 的图象在第一象限内交于 $A(4,a)$.

（1）求一次函数的解析式；

（2）若直线 $x=n(0<n<4)$ 与反比例函数和一次函数的图象分别交于点 B，C，连接 AB，若 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，求 n 的值.

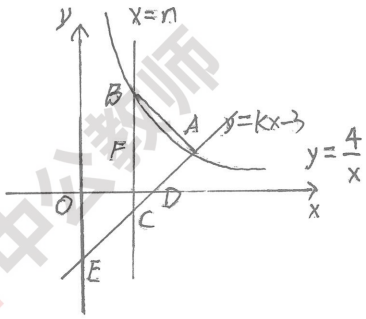


注意：△ABC为等腰直角三角形，可能会涉及分类讨论的情况，需要结合实际情况做出判断.

例题 2．【答案】（1）$y=x-3$；（2）1.

解析：（1）∵反比例 $y=\frac{4}{x}$ 的图象过点 $A(4,a)$，∴ $a=\frac{4}{4}=1$，∴ $A(4,1)$，把 $A(4,1)$ 代入一次函数 $y=kx-3$，得 $4k-3=1$，∴ $k=1$，∴一次函数的解析式为 $y=x-3$；

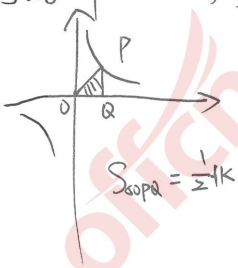
（2）由题意可知，点 B、C 的坐标分别为 $\left(n,\frac{4}{n}\right)$，$(n,n-3)$．设直线 $y=x-3$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 D、E，如图，



当 $x=0$ 时，$y=-3$；当 $y=0$ 时，$x=3$，∴ $OD=OE$，∴ $\angle OED=45°$．∵直线 $x=n$ 平行于 y 轴，∴ $\angle BCA=\angle OED=45°$，∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，且 $0<n<4$，∴只有 $AB=AC$ 一种情况，过点 A 作 $AF\perp BC$ 于 F，则 $BF=FC$，$F(n,1)$，∴ $\frac{4}{n}-1=1-(n-3)$，解得 $n_1=1$，$n_2=4$，∵ $0<n<4$，∴ $n_2=4$ 舍去，∴ n 的值是 1.

快速解题技巧之反比例函数中k的几何意义

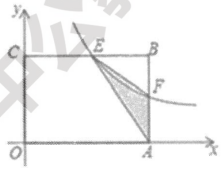
例题 3．如图，在矩形 OABC 中，$OA=6$，$OC=4$，F 是 AB 上的一个动点（F 不与 A，B 重合），过点 F 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象与 BC 边交于点 E.



$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|k|$

（1）当 F 为 AB 的中点时，求该函数的解析式；

（2）当 k 为何值时，△EFA 的面积最大，最大面积是多少？



例题 3.【答案】(1)该函数的解析式为 $y=\frac{12}{x}(x>0)$；(2)当 $k=12$ 时，S 有最大值，$S_{最大}=3$．

解析：(1) ∵在矩形 OABC 中，$OA=6$，$OC=4$，∴ $B(6,4)$，

∵F 为 AB 的中点，∴ $F(6,2)$，

又∵点 F 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象上，∴ $k=12$，

∴该函数的解析式为 $y=\frac{12}{x}(x>0)$．

(2) 由题意知 E，F 两点坐标分别为 $E\left(\frac{k}{4},4\right)$，$F\left(6,\frac{k}{6}\right)$，

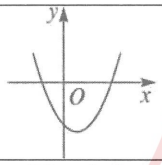
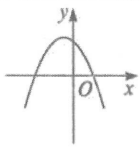
∴ $S_{\triangle EFA}=\frac{1}{2}AF\cdot EB=\frac{1}{2}\times\frac{k}{6}\left(6-\frac{k}{4}\right)$，

$=\frac{k}{2}-\frac{k^2}{48}=-\frac{1}{48}\left(k^2-24k\right)=-\frac{1}{48}\left[(k-12)^2-144\right]=-\frac{1}{48}(k-12)^2+3$，

考查二次函数最值问题与求解方法

∴当 $k=12$ 时，S 有最大值，$S_{最大}=3$．

考点 • 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq0$）的图象与性质

a 的符号	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	开口向上	开口向下
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	直线 $x=-\frac{b}{2a}$
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
增减性	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

"就分"

对称轴与开口方向结合确定

关联开口方向，即a的正负情况

例题 1．把抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，则所得抛物线的解析式为_____．

函数的平移：左加右减 → x

上加下减 → y

例：点的平移：左减右加 → x

上加下减 → y

例题 1.【答案】$y=\frac{1}{2}x^2$．解析：　$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 向左平移 1 个单位后得到的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2+2$，再向下平移 2 个单位，得到的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2$．左加右减，上加下减．

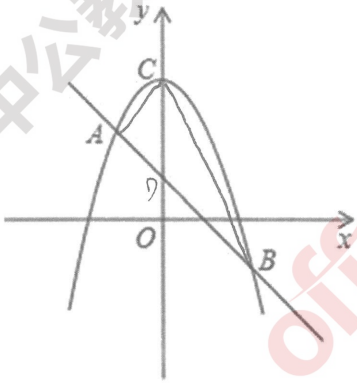
左右直接对x加减，加括号；上下在最后加减．

例题 2．如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与二次函数 $y=-x^2+c$ 的图象相交于 $A(-1,2)$，$B(2,n)$ 两点．

（1）求一次函数和二次函数的解析式；

（2）根据图象直接写出使二次函数的值大于一次函数的值的 x 的取值范围；

（3）设二次函数 $y=-x^2+c$ 的图象与 y 轴相交于点 C，连接 AC，BC，求 $\triangle ABC$ 的面积．



例题 2．【答案】（1）$y=-x+1$；（2）$-1<x<2$；（3）3．

解析：（1）把 $A(-1,2)$ 代入 $y=-x^2+c$ 得：$-1+c=2$，解得：$c=3$，

代入求解．

$\therefore y=-x^2+3$，把 $B(2,n)$ 代入 $y=-x^2+3$ 得：$n=-1$，$\therefore B(2,-1)$；

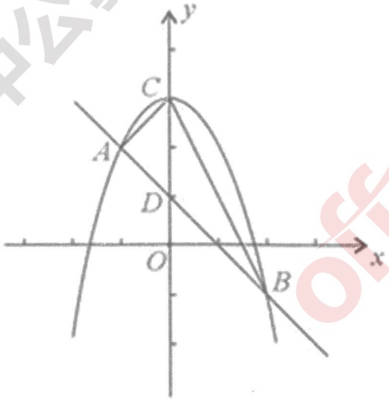
把 $A(-1,2)$、$B(2,-1)$ 分别代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=2\\2k+b=-1\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}k=-1\\b=1\end{cases}$，

$\therefore y=-x+1$；

在上方时，函数值大（2）根据图象得：使二次函数的值大于一次函数的值的 x 的取值范围是 $-1<x<2$；

（3）连接 AC、BC，设直线 AB 交 y 轴于点 D，

不规则：分割为2个三角形．分别计算．



把 $x=0$ 代入 $y=-x^2+3$ 得：$y=3$，$\therefore C(0,3)$；把 $x=0$ 代入 $y=-x+1$ 得：$y=1$，$\therefore D(0,1)$，

$\therefore CD=3-1=2$，则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times2=1+2=3.$

考点·等腰三角形

1. 等腰三角形的性质与判定

（1）等腰三角形的性质

①等腰三角形的两个底角相等（简称为"等边对等角"）.

②等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合（简称为"三线合一"）.

③等腰三角形是轴对称图形.

（2）等腰三角形的判定：如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简称为"等角对等边"）.

2. 等边三角形的性质与判定

（1）等边三角形的性质

①等边三角形的内角相等，且都等于 60°.

②等边三角形的三条边都相等.

③等边三角形同样具有"三线合一"的性质.

④等边三角形是轴对称图形，有三条对称轴.

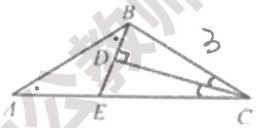
（2）等边三角形的判定

①三条边相等的三角形是等边三角形.

②三个角相等的三角形是等边三角形.

③有一个角为 60°的等腰三角形是等边三角形.

例题．如图，D 为 $\triangle ABC$ 内一点，CD 平分 $\angle ACB$，$BE\perp CD$，垂足为 D，交 AC 于点 E，$\angle A=\angle ABE$，$AC=5$，$BC=3$，则 BD 的长为（　　）.



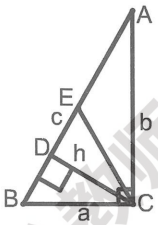
A．1　　B．1.5

C．2　　D．2.5

例题．【答案】A．解析：∵CD 平分 $\angle ACB$，$BE\perp CD$，∴ $BC=CE$，又∵ $\angle A=\angle ABE$，∴ $AE=BE$，∴ $BD=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}(AC-BC)$，∵ $AC=5$，$BC=3$，∴ $BD=\frac{1}{2}\times(5-3)=1$，故选 A．

考点·直角三角形

1．直角三角形性质



（1）角的关系：$\angle A+\angle B=90^\circ$．

（2）边的关系：$a^2+b^2=c^2$（勾股定理）．

（3）边角关系：$\left.\begin{array}{l}\angle C=90^\circ\\ \angle A=30^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow BC=\frac{1}{2}AB$（直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半）（另外还有三角函数关系）．

（4）$\left.\begin{array}{l}\angle C=90^\circ\\ AE=BE\end{array}\right\}\Rightarrow CE=\frac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线 CE 等于斜边 AB 的一半）．

c.h.a.b
知三求一（利用面积）

（5）$ch=ab=2S$（如图，S 是 Rt△ABC 的面积，h 是斜边上的高）．

（6）外接圆半径 $R=\frac{c}{2}$；内切圆半径 $r=\frac{a+b-c}{2}$．

$R=\frac{c}{2}$.

2．直角三角形的判定

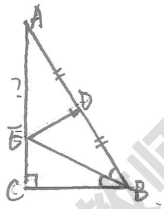
（1）有一个角等于 90°的三角形是直角三角形．

（2）有两角互余的三角形是直角三角形．

（3）如果三角形一边上的中线等于这边的一半，则该三角形是直角三角形．

（4）勾股定理的逆定理：如果三角形一条边的平方等于另外两条边的平方和，那么这个三角形是直角三角形．

例题 1．如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，BE 平分∠ABC，ED 垂直平分 AB 于 D，若 AC=9，则 AE 的值是（　　）．



9

30°角所对直角边是斜边的一半.

A．$6\sqrt{3}$　　B．$4\sqrt{3}$

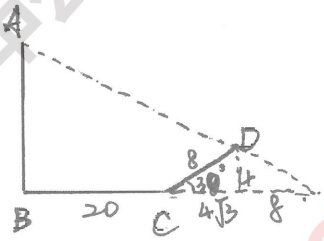
C．6　　D．4

角平分线上的点到角两边的距离相等.

例题 1．【答案】C．解析：因为 BE 平分∠ABC，所以 DE=CE，∠CBE=∠DBE，因为 ED 垂直平分 AB 于 D，所以∠DBE=∠A，所以∠CBE=∠DBE=∠A，又∠C=90°，所以∠A=30°，则在直角三角形 ADE 中，有 AE=2DE=2CE，又 AC=9，所以 AE=6．

例题 2．如图，小阳发现电线杆 AB 的影子落在土坡的坡面 CD 和地面 BC 上，量得 CD=8 米，BC=20 米，CD 与地面成 30° 角，且此时测得 1 米杆的影长为 2 米，则电线杆的高度为

_____米.



例题 2.【答案】$14+2\sqrt{3}$．解析：如图做辅助线：$DE=DC\sin 30^{\circ}=4$，$CE=4\sqrt{3}$，

$\therefore \Delta DEF\sim\Delta ABF$，所以可以得到$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BF},\dfrac{AB}{BF}=\dfrac{1}{2}$，联立解得$AB=14+2\sqrt{3}$．

考点•三角形全等的判定

① 已知两边，通常再找一边或一角.

1．边角边定理：有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可简写成“边角边”或“SAS”）．

② 已知两角，通常再找一边.

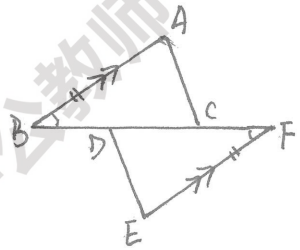
2．角边角定理：有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角边角”或“ASA”）．

3．角角边定理：有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角角边”或“AAS”）．

4．边边边定理：有三边对应相等的两个三角形全等（可简写成“边边边”或“SSS”）．

5．斜边、直角边定理：有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可简写成“斜边、直角边”或“HL”）．

例题 1．如图，AB∥EF，AB＝EF，添加下面哪个条件不能使△ABC≌△EFD（　　）．



A．BD＝FC　　B．∠A＝∠E

C．AC∥DE　　D．AC＝ED

例题 1.【答案】D．解析：∵AB∥EF，∴∠B=∠F，且 AB=EF，

当 BD=CF 时，可得 BC=DF，在△ABC 和△EFD 中，满足 SAS，故 A 可以判定；

当∠A=∠E 时，在△ABC 和△EFD 中，满足 ASA，故 B 可以判定；

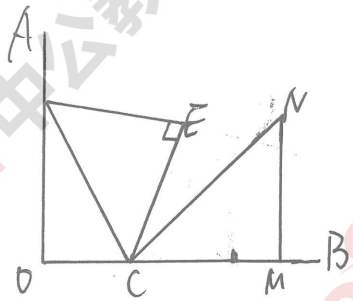
当 AC∥DE 时，可得∠ACB=∠EDF，在△ABC 和△EFD 中，满足 AAS，故 C 可以判定；

当 AC=DE 时，在△ABC 和△EFD 中，满足 SSA，故 D 不可以判定，故选 D．

常出现错误判定：边边角

反例：

例题 2．如图$OA\perp OB$，ΔCDE是等腰直角三角形，点C、D分别在OB、OA上，$\angle CED=90^{\circ}$，将ΔCDE绕点C顺时针旋转75°，点E的对应点M恰好落在OB上，则$\dfrac{OD}{CM}$值为（　　）．

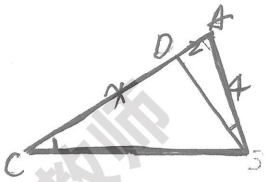


A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

例题 2.【答案】B．解析：∵等腰三角形△CDE 的顶点 D、C 在 OA、OB 上，$\angle M=90°$，∴ $\angle EDC=\angle ECD=45°$，$CE=\frac{\sqrt{2}}{2}CD$，由旋转的性质得：$\angle MCN=\angle DCE=\angle ECD=45°$，$CM=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}CD$，$\angle DCN=75°$，∴ $\angle DCM=45°+75°=120°$，∴ $\angle OCD=60°$，∴ $OD=sin60°\times CD=\frac{\sqrt{3}}{2}CD$，∴ $\frac{OD}{CM}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}CD}{\frac{\sqrt{2}}{2}CD}=\frac{\sqrt{6}}{2}$．故选 B．

例题 3．如图，在△ABC 中，D 为 AC 边上一点，且∠DBA=∠C，若 $AD=2cm$，$AB=4cm$，那么 CD 的长等于_____cm.



$\frac{4}{x+2}=\frac{2}{4}$　$x=6$

△ABD∽△ACB

⇒ 相似三角形证明定理

'AAA'、'SSS'、'SAS'、'ASA'、'AAS'、'HL'

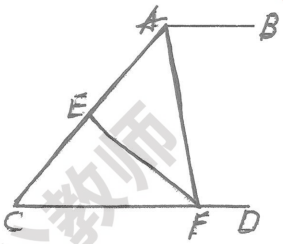
⇒ 思路：已知两边成比例 ⇒ ① 找第三边 'SSS'

② 找两边夹角 'SAS'

③ 找有斜边 'HL' 成立

例题 3.【答案】6．解析：∵$\angle DBA=\angle C$，$\angle A$ 是公共角，∴△ABC∽△ADB，∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$，即 $\frac{2}{4}=\frac{4}{AC}$，解得：AC=8，∴CD=8－2=6．故答案为：6．

例题 4．如图，AB//CD，AC 的垂直平分线分别交 AC，CD 于点 E，F，若 ∠C=56°，则 $\angle BAF$ 的度数是_____.



垂直平分线性质

① 垂直平分线上的点到线段两端距离相等

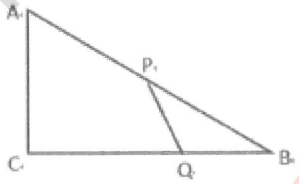
② 三角形中垂直平分线交于一点 ⇒ ~~角的~~ 外心

例题 4.【答案】68°．解析：∵AC 的垂直平分线分别交 AC，CD 于点 E、F，∴ $\angle C=\angle CAF=56°$，又∵ $AB\parallel CD$，∴ $\angle CAB=180°-\angle C=124°$，∴ $\angle BAF=\angle CAB-\angle CAF=68°$．

例题 5．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中 $\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，动点 P 由起点 A 沿边 AB 向终点 B 运动，每秒两个单位，动点 Q 由起点 B 沿边 BC 向终点 C 运动，每秒一个单位，P、Q 两点同时由起点开始运动，记运动时间为 t 秒．

（1）设$\triangle BPQ$的面积为S，求S的最大值；

（2）当$\triangle BPQ$与$\triangle ABC$相似时，求t的值．



例题5．【答案】（1）$\frac{15}{4}$；（2）$\frac{25}{7},\frac{40}{13}$．

解析：（1）作 QD 垂直于 BP 交 BP 与 D．$\sin B=\frac{AC}{AD}=\frac{6}{10}=\frac{QD}{BQ}=\frac{QD}{t}$，解得$QD=\frac{3}{5}t$，因为$AP=2t,\mathrm{AB}=10,$所以$\mathrm{BP}=10-2\mathrm{t}$；$s=\frac{1}{2}\times(10-2\mathrm{t})\times\frac{3}{5}t=3t-\frac{3}{5}t^2$，当$t=\frac{5}{2}$时 S 取得最大值，最大值为$\frac{15}{4}$．

（2）因为$\triangle BPQ\backsim\triangle ABC$，所以$\frac{BQ}{AB}=\frac{BP}{BC},\frac{t}{10}=\frac{10-2t}{8}$，解得$t=\frac{25}{7}$，因为$\triangle PQB\backsim\triangle ABC$，所以$\frac{BQ}{BC}=\frac{BP}{AB},\frac{t}{8}=\frac{10-2t}{10}$，解得$t=\frac{40}{13}$．

平行四边形成立条件 $\begin{cases}\text{一组对边平行且相等的四边形}\\ \text{两组对边分别平行的四边形}\\ \text{对角相等(两组)的四边形}\end{cases}$

考点·平行四边形

1．平行四边形

（1）性质

①平行四边形对边平行且相等，对角相等；邻角互补；对角线互相平分．

②平行四边形两个邻角的平分线互相垂直，邻边不相等的平行四边形的两个对角的平分线互相平行．

（2）判定

①定义法：两组对边分别平行的四边形是平行四边形．

②边：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；一组对边平行且相等的四边形是平行四边形．

AP平分∠A；BP平分∠B

$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$

$\therefore\angle P=90^\circ$

③角：两组对角分别相等的四边形是平行四边形．

④对角线：对角线互相平分的四边形是平行四边形．

2．矩形

（1）性质

①矩形的四个角都是直角．

②矩形的对角线相等．

对角线相等的四边形不一定是矩形．例如：等腰梯形

③矩形具有平行四边形的所有性质．

（2）判定

①有三个角是直角的四边形是矩形．

②对角线相等的平行四边形是矩形．

3．菱形

（1）性质

①菱形的四条边都相等．

看平行四边形 对角线相等 矩形 → 正方形

边相等 菱形 →

②菱形的对角线互相垂直且平分，并且每一条对角线平分一组对角.

③菱形具有平行四边形的所有性质.

菱形的对角线互相垂直，分成4个全等的直角△，直角便于后面的建系，找直角解决问题.

（2）判定

①对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

②四条边都相等的四边形是菱形.

4．正方形

（1）性质

①正方形的四条边都相等，四个角都是直角.

②正方形的对角线相等，且互相垂直平分；每条对角线平分一组对角.

③正方形是轴对称图形，两条对角线所在直线，以及过每一组对边中点的直线都是它的对称轴；正方形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

（2）判定

①一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形是正方形.

②一组邻边相等的矩形是正方形.

③对角线互相垂直的矩形是正方形.

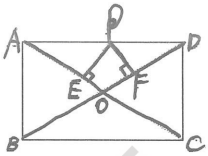
④有一个角是直角的菱形是正方形.

⑤对角线相等的菱形是正方形.

正方形：拥有平行四边形、矩形、菱形所有性质

拥有 . . . . . 所有特点.

例题 1．如图，在矩形 ABCD 中，$AB=6$，$AD=8$，P 是 AD 上一动点，$PE\perp AC$ 于 E，$PF\perp BD$ 于 F，则 $PE+PF$ 的值为（　　）.

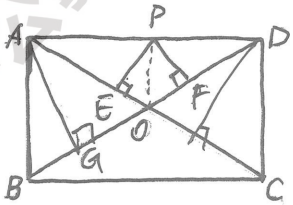


矩形内可以利用对角线分等积法，也可以利用相似或成比例解决问题

A．5　　B．4.8

C．4.4　　D．4

例题 1.【答案】B．解析：如图，过点 A 作 $AG\perp BD$ 于 G，连接 PO，



∵AB=6，AD=8，∴BD=$\sqrt{AB^2+AD^2}$=10，∴S△ABD=$\frac{1}{2}$BD•AG=$\frac{1}{2}$AB•AD，

即$\frac{1}{2}$×10•AG=$\frac{1}{2}$×6×8，解得 AG=4.8，在矩形 ABCD 中，AO=OD，

∴S△AOD=$\frac{1}{2}$AO•PE+$\frac{1}{2}$OD•PF=$\frac{1}{2}$OD•AG，∴PE+PF=AG=4.8．故选 B.

例题 2．如图，平行四边形 ABCD 中，AC 与 BD 相交于点 O，AB＝AC，延长 BC 到点 E，使 CE＝BC，连接 AE，分别交 BD、CD 于点 F、G.

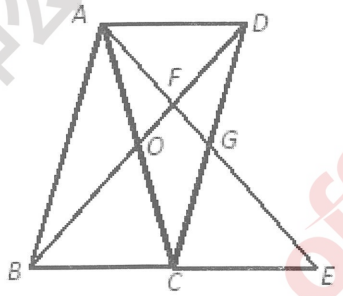
（1）求证：△ADB≌△CEA；

（2）若 BD＝6，求 AF 的长.

分析证明：SSS SAS ASA AAS HL

无SSA ×

根据 ②③条件找信



本题还可以用HL证明，作高找垂直.

例题 2.【答案】（1）见解析；（2）2.

解析：（1）∵四边形 ABCD 是平行四边形，∴AD=BC，∠ABC+∠BAD=180°.

又∵AB=AC，∴∠ABC=∠ACB.

∵∠ACB+∠ACE=180°，∴∠BAD=∠ACE.

∵CE=BC，∴CE=AD，∴△ADB≌△CEA（SAS）. 相似则对应线段成比例.

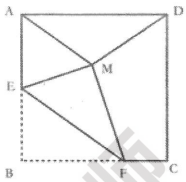
（2）∵△ADB≌△CEA，∴AE=BD=6.

∵AD∥BC，∴△ADF∽△EBF. ∴$\frac{AF}{EF}=\frac{AD}{BE}=\frac{1}{2}$. ∴$\frac{AF}{AE}=\frac{1}{3}$. ∴AF=2.

例题 3．如图，正方形纸片 ABCD，边长 2，其中 E 为 AB 中点，点 F 是 BC、CD 两边上任意一点，沿直线 EF 折叠得 $\triangle MEF$，点 B 的对应点 M 点，分别连接 AM、DM

（1）当点 F 位于 BC 边什么位置时，$\triangle AMD$ 为直角三角形；

（2）若点 F 在 BC 边上，且 $\triangle BFM$ 为等边三角形时，连接 DF，求 $\triangle DCF$ 的面积；



动点问题，多找定值或定点作为突破.

例题 3.【答案】（1）BC 中点；（2）$2-\sqrt{3}$.

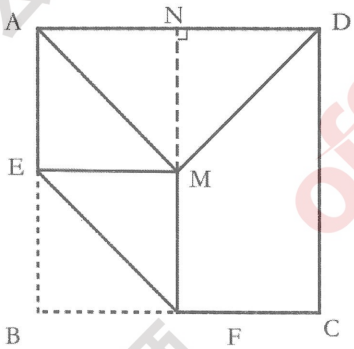
解析：（1）如图，取 AD 得中点 N，连接 MN

找等边三角形思路

① 找一个等角证60°

② 找二边相等

③ 找另一个等边，此法等腰与三角形



因为 $\triangle AMD$ 为直角三角形，所以 $MN=\frac{1}{2}AD$

又因为四边形 ABCD 是正方形，E 是 AB 的中点

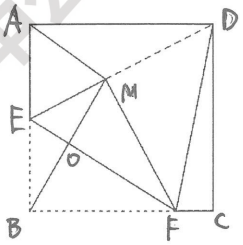
所以 AE=EM=AN=MN，且 $\angle EAD=90°$

所以四边形 AEMN 为正方形，所以 EM 平行且等于 AN，从而得 $EM \parallel BF$

又 $\angle B=\angle EMF=90°$ 故四边形 NEMF 为正方形，所以 $BF=BE=\frac{1}{2}BC$

即 F 为 BC 的中点时，$\triangle AMD$ 为直角三角形.

（2）如下图



$\because \triangle BFM$ 为等边三角形且 $\angle EMF=90°$

$\therefore \angle BME=30°$

翻折的性质

又 $\triangle EMF$ 是 $\triangle EBF$ 沿 EF 翻折所得，故 EM=EB，EF 与 BM 的交点 O 为 BM 的中点

所以 $EO\perp BM$，又知 EM=1，$\therefore OM=EM\cdot\cos30°=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore BF=BM=2OM=\sqrt{3}$，$\therefore CF=BC-BF=2-\sqrt{3}$

$\therefore S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot CF=\frac{1}{2}\times2\times(2-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$.

考点·圆

1．在同圆或等圆中，圆心角、圆心角对的弧、弦、弦心距有一组相等则其他几组对应相等.

2．垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧.

推论：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

常结合勾股定理考查，构造直角三角形，可解决计算弦长、半径、弦心距等问题，常用方程思想，用代数方法解决几何问题.

3．一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

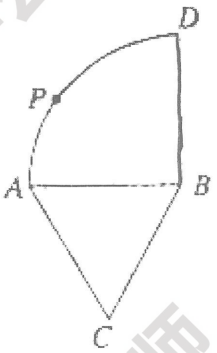
半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90° 的圆周角所对的弦是直径.

4．切线的性质：圆的切线垂直于过切点的半径.

切线的判定：经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

常用方法：1、连半径，证垂直；2、作垂直，证半径.

例题 1．如图，$\overset{\frown}{AD}$ 是以等边三角形 ABC 一边 AB 为半径的四分之一圆周，P 为 $\overset{\frown}{AD}$ 上任意一点，若 AC=5，则四边形 ACBP 周长的最大值是（　　）.



A．15　　B．20

C．$15+5\sqrt{2}$　　D．$15+5\sqrt{5}$

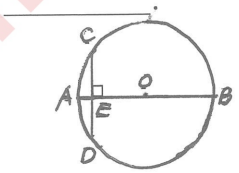
例题 1．【答案】C．解析：考查四边形周长的计算，四边形 ACBP 周长最大时为点 P 与点 D 重合时，点 P 与点 D 重合时四边形 ACBP 的周长为：AC+BC+BD+AD=5+5+5+$5\sqrt{2}$=15+$5\sqrt{2}$，故应选 C.

例题 2．一条弦 AB 将⊙O 分成两条弧，其中一条弧是另一条弧的 4 倍，则弦 AB 所对的圆心角的度数是_____度.

例题 2．【答案】72．解析：由于弦 AB 将⊙O 分成了 1:4 两段弧，∴AB 所对的圆心角

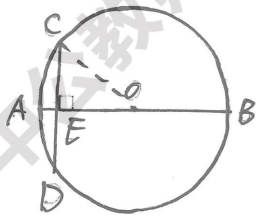
$\angle AOB=\frac{1}{5}\times 360^{\circ}=72^{\circ}$．故答案为 72．

例题 3．如图，AB 是⊙O 的直径，弦 CD⊥AB 于点 E．若 AB=8，AE=1，则弦 CD 的长是



构造直角三角形

例题 3．【答案】$2\sqrt{7}$．解析：由题意连接 OC，得 $OE=OB-AE=4-1=3$，$CE=CD=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{7}$，$CD=2CE=2\sqrt{7}$．

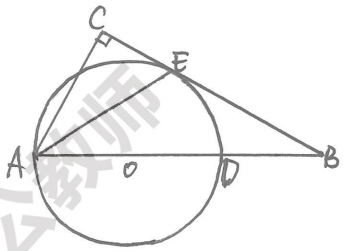


例题 4．如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，点 D 在 AB 上，以 AD 为直径的⊙O 与 BC 相交于点 E，且 AE 平分∠BAC．

（1）求证：BC 是⊙O 的切线；

（2）若∠EAB=30°，OD=3，求图中阴影部分的面积．

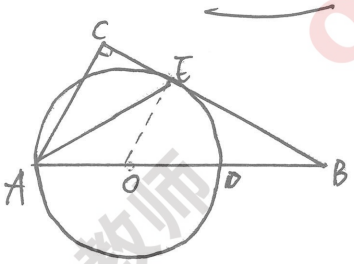
求阴影面积方法：① 直接用公式法；
② 和差法；
③ 割补法（转化）



例题 4.【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{3\pi}{2}$．

解析：（1）证明：连接 OE，

用法1．



∵AE 平分∠BAC，∴∠CAE=∠EAD，

∵OA=OE，∴∠EAD=∠OEA，∴∠OEA=∠CAE，∴OE∥AC，∴∠OEB=∠C=90°，

∴OE⊥BC，且点 E 在⊙O 上，∴BC 是⊙O 的切线．

连半径，证垂直

（2）∵∠EAB=30°，∴∠EOD=60°，

∵∠OEB=90°，∴∠B=30°，∴OB=2OE=2OD=6，∴ $BE=\sqrt{OB^2-OE^2}=3\sqrt{3}$，

$S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{1}{2}lR$

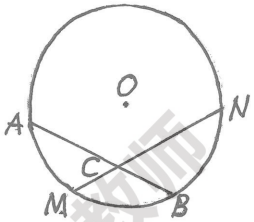
$S_{\triangle OEB}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$，扇形 OED 的面积 $=\frac{3}{2}\pi$．阴影部分的面积为：$\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\pi$．

例题 5．已知：如图，M 是弧 AB 的中点，过点 M 的弦 MN 交弦 AB 于点 C，设⊙O 的半径为 4cm，$MN=4\sqrt{3}$cm．

(1) 求圆心 O 到弦 MN 的距离；

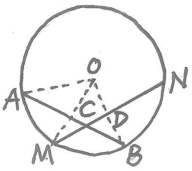
(2) 猜想 OM 和 AB 的位置关系，并说明理由；

(3) 求∠ACM 的度数．



例题 5.【答案】(1) 圆心 O 到弦 MN 的距离为 2cm；(2) $OM\perp AB$，理由见解析；(3) $\angle ACM=60^\circ$．

解析：(1) 连接 OM，



求弦心距，常用垂径定理

∵点 M 是弧 AB 的中点，∴$OM\perp AB$，过点 O 作 $OD\perp MN$ 于点 D，由垂径定理，

得 $MD=\frac{1}{2}MN=2\sqrt{3}$．在 Rt△ODM 中，$OM=4$，$MD=2\sqrt{3}$，∴$OD=\sqrt{OM^2-MD^2}=2$，

故圆心 O 到弦 MN 的距离为 2cm．

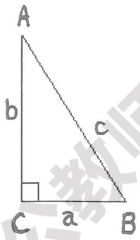
(2) 猜想：$OM\perp AB$，

连接 OA、OB，由 M 是弧 AB 的中点，得 $\angle AOM=\angle BOM$，又因为 $OA=OB$，所以 $OM\perp AB$．

(3) $\cos\angle OMD=\frac{MD}{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\angle OMD=30^\circ$，∵$OM\perp AB$，∴$\angle ACM=60^\circ$．

考点·三角函数

1．锐角三角函数的定义



正弦：$\frac{对边}{斜边}$　正切：$\frac{对边}{邻边}$

余弦：$\frac{邻边}{斜边}$

$\sin A=\frac{a}{c}$；$\cos A=\frac{b}{c}$；$\tan A=\frac{a}{b}$．

2．同角或互余两角的三角函数关系

(1) 互余两角之间的三角函数关系：$\sin A=\cos B$．

常用关系

（2）同角之间的三角函数关系：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$；$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$.

3．锐角三角函数的大小比较

（1）正弦、正切是增函数，三角函数值随角的增大而增大.

（2）余弦、余切是减函数，三角函数值随角的增大而减小.

4．特殊角的三角函数值

三角函数值 角 / 三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
cotα	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

结合图形记忆特殊角的三角函数值

5．解直角三角形

解决这类问题的关键是以边角关系和勾股定理为主，构造直角三角形，应用锐角三角函数解题

（1）边的关系（勾股定理）：$AC^2+BC^2=AB^2$.

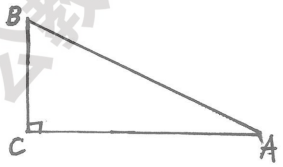
（2）角的关系：$\angle A+\angle B=\angle C=90^\circ$.

（3）边角关系：锐角三角函数关系.

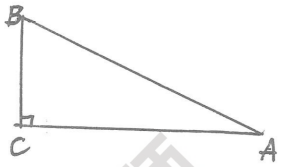
例题．在△ABC 中，$\angle C$=90°，如果 AB=2，BC=1，那么 sin$A$ 的值是（　　）.

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



例题．【答案】A．解析：由题意得：$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}$．故选 A.



考点·视图

1．视图

主视图：从正面看到的图；左视图：从左面看到的图；俯视图：从上面看到的图.

2．画三视图的原则

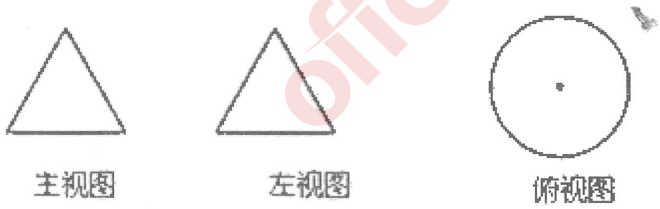
长对正，高平齐，宽相等；在画图时，看得见部分的轮廓线通常画成实线，看不见的轮廓线通常画成虚线.

主视图与俯视图的长要相等，
左视图与俯视图的宽要相等，
主视图与左视图的高要相等.

3．由三视图还原几何体

观察三视图时，可从主视图上分清物体各部分的上下和左右位置；从俯视图上分清物体各部分的左右和前后位置；从左视图上分清物体各部分的上下和前后位置．

例题 1．如图是几何体的三视图，则这个几何体是（　　）．



A．圆锥　　B．正方体

C．圆柱　　D．球

例题 1.【答案】A．解析：根据一个空间几何体的主视图和左视图都是三角形，可判断该几何体是锥体，再根据俯视图的形状，即可得出答案．

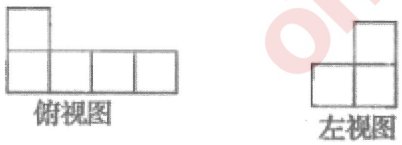
A．圆锥的主视图和左视图都是三角形，俯视图是圆及一个圆点，故符合题意；

B．正方体的主视图、左视图和俯视图都是正方形，故不符合题意；

C．圆柱的主视图和左视图都是矩形，俯视图是圆，故不符合题意；

D．球的主视图、左视图和俯视图都是圆，故不符合题意；故选 A．

例题 2．几个相同的小立方块的俯视图及左视图如图所示，则构成该几何体的小立方块的个数最多为（　　）．

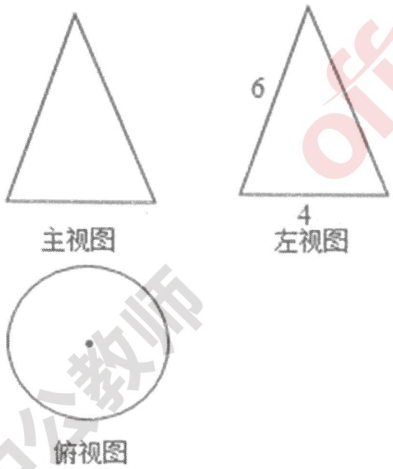


A．6 个　　B．7 个

C．8 个　　D．9 个

例题 2.【答案】D．解析：由题中俯视图和左视图可知，构成该几何体的小立方块的个数最多的情况为前排两层共 8 个，后排一层共 1 个，总计 9 个．故选 D．

例题 3．如图是一个几何体的三视图，根据图中数据计算这个几何体的表面积是（　　）．



A．16π　　B．12π

C．10π　　D．4π

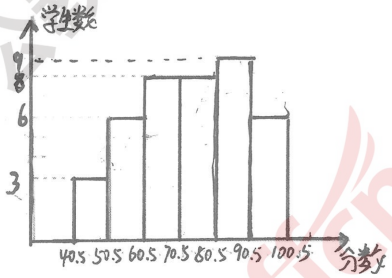
例题 3.【答案】A．解析：由主视图和左视图为三角形判断出是锥体，由俯视图是圆形可判断出这个几何体应该是圆锥；根据三视图知：该圆锥的母线长为 6，底面半径为 2，

故表面积 $=\pi rl+\pi r^2=\pi\times2\times6+\pi\times2^2=16\pi$．故选 A．

考点·常见统计图的特点

名称	特点
条形图	能清楚地表示每个项目的具体数据
扇形图	能直观地反映部分占总体的百分比
折线图	能清楚地反映数据的变化趋势
直方图	能直观、清楚地反映数据在各小组的分布情况

例题 1．某校 40 名学生参加科普知识竞赛（竞赛分数都是整数），竞赛成绩的频数分布直方图如图所示，成绩的中位数落在（　　）．

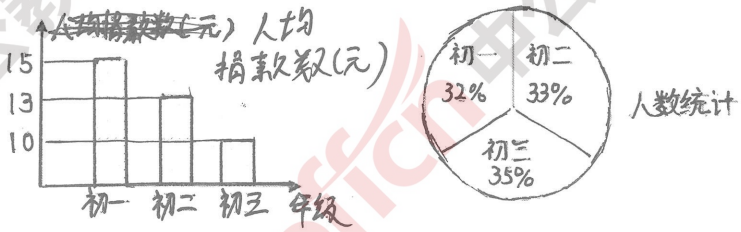


A．50.5～60.5 分　　B．60.5～70.5 分

C．70.5～80.5 分　　D．80.5～90.5 分

例题 1.【答案】C．解析：由频数分布直方图知，这组数据共有 3+6+8+8+9+6=40 个，则其中位数为第 20、21 个数据的平均数，而第 20、21 个数据均落在 70.5～80.5 分这一分组内，所以中位数落在 70.5～80.5 分．故选 C．

例题 2. 如图是根据某初中为地震灾区捐款的情况而制作的统计图，已知该校在校学生有 200 人，请根据统计图计算该校共捐款_____元．



例题 2.【答案】2518．解析：根据题意得：初一学生捐款的钱数 200×32%×15=960 元，初二学生捐款的钱数 200×33%×13=858 元，初三学生捐款的钱数 200×35%×10=700 元，所以该校学生共捐款 960+858+700=2518 元．

考点·概率

1．事件的分类

$$\text{事件}\begin{cases}\text{确定事件}\begin{cases}\text{必然事件：}P=1\\ \text{不可能事件：}P=0\end{cases}\\ \text{不确定事件(随机事件)：}0<P<1\end{cases}$$

2．概率的计算方法

（1）利用概率的定义直接计算

一般地，如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率为：$P(A)=\frac{m}{n}$.

（2）树形图法.
（3）列表法. 用来求事件概率的方法.

（4）用频率估计概率（在大量重复试验中，事件 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$，我们可以估计事件 A 发生的概率为 $\frac{m}{n}$）.

3．用面积法求概率：当随机事件的概率大小与几何图形的面积有关时，往往利用面积法求概率，计算公式为：$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{发生的面积}}{\text{总面积}}$.

4．当一次试验要涉及 1 个因素时，通常采用枚举法求事件的概率；当一次试验涉及 2 个因素时，可用列表法或画树状图法求概率；当一次试验涉及 3 个或 3 个以上的因素时，必须用画树状图法求概率.

5．用试验估算某事件发生的概率：某事件发生的概率$=\frac{\text{此事件出现的次数}}{\text{实验的总次数}}$.

例题 1．在一次"爱心互助"捐款活动中，某班第一小组 7 名同学捐款的金额（单位：元）分别为 6，3，6，5，5，6，9 这组数据的中位数和众数分别是（　　）.

A．5，5　　B．6，6
C．6，5　　D．5，6

例题 1.【答案】B．解析：将这一组数按照从高到低的顺序排列，得 3、5、5、6、6、6、9，则其中位数为 6；这组数中出现次数最多的数是 6，即为众数，故答案为 B.

例题 2．下列算式：① $\sqrt{9}=\pm3$；② $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$；③ $2^6\div2^3=8$；④ $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$；⑤ $a+a=a^2$ 运算结果正确的概率是_____.

①$\sqrt{9}=\pm3$，容易出错，很多人对于正数的平方根概念理解不清，$\sqrt{9}$是算术平方根即3，$-\sqrt{9}=-3$.

例题 2.【答案】$\frac{3}{5}$．解析：只有②③④正确，故正确的概率为 $\frac{3}{5}$.

例题 3．一枚质地均匀的骰子，其中六个面上分别标有数字 1，2，3，4，5，6，投掷一次，朝上一面的数字是奇数的概率为_____.

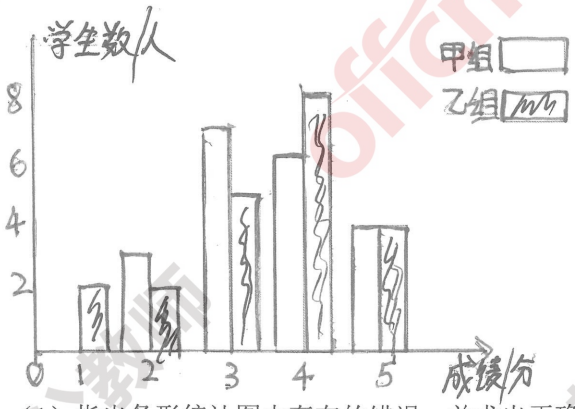
例题 3.【答案】$\frac{1}{2}$．解析：一枚质地均匀的骰子，其六个面分别标有数字 1，2，3，4，5，6，投掷一次，朝上一面是奇数的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

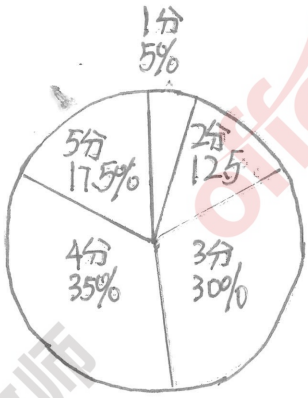
例题 4．从 - 1，2，3，- 6 这四个数中任选两数，分别记作 m，n，那么点 (m,n) 在函数 $y=\frac{6}{x}$ 图象上的概率是_____.

例题 4.【答案】$\frac{1}{3}$．解析：∵共有 12 种等可能的结果，点 (m,n) 恰好在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 图象上的有：（2，3），（ - 1，- 6），（3，2），（ - 6，- 1），∴点 (m,n) 在函数 $y=\frac{6}{x}$ 图象上的概率是：$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$．故答案为：$\frac{1}{3}$.

此题应用高中排列组合知识更简单 $\frac{2}{C_4^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

例题 5．九（1）班同学分成甲、乙两组，开展“四个城市建设”知识竞赛，满分得 5 分，得分均为整数．小马虎根据竞赛成绩，绘制了如图所示的统计图．经确认，扇形统计图是正确的，条形统计图也只有乙组成绩统计有一处错误．





（1）指出条形统计图中存在的错误，并求出正确值；

（2）若成绩达到 3 分及以上为合格，该校九年级有 800 名学生，请估计成绩未达到合格的有多少名？

（3）九（1）班张明、李刚两位成绩优秀的同学被选中参加市里组织的“四个城市建设”知识竞赛．预赛分为 A、B、C、D 四组进行，选手由抽签确定．张明、李刚两名同学恰好分在同一组的概率是多少？

例题 5．【答案】（1）见解析；（2）140 人；（3）$\frac{1}{4}$．

解析：（1）由统计图可得：

	（1 分）	（2 分）	（3 分）	（4 分）	（5 分）
甲（人）	0	3	7	6	4
乙（人）	2	2	5	8	4
全体（%）	5	12.5	30	35	17.5

乙组得分的人数统计有误，理由：由条形统计图和扇形统计图的对应可得，

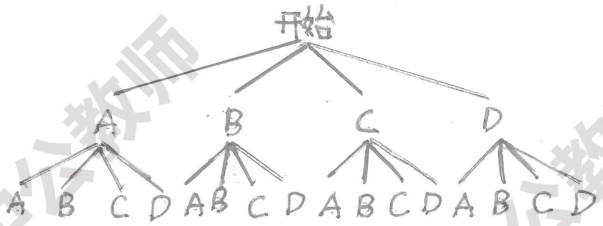
2÷5%=40，（3+2）÷12.5%=40，

（7+5）÷30%=40，（6+8）÷35%=40，（4+4）÷17.5%≠40，

故乙组得 5 分的人数统计有误，正确人数应为：40×17.5%﹣4=3．

（2）800×（5%+12.5%）=140（人）；

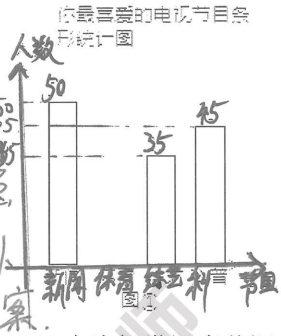
（3）如图得：



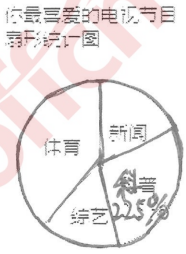
∵共有 16 种等可能的结果，所选两人正好分在一组的有 4 种情况，

∴所选两人正好分在一组的概率是：$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$．

例题 6. 某电视台为了解本地区电视节目的收视情况，对部分观众开展了你最喜爱的“电视节目”的问卷调查，每人只填写一项，根据收集的数据绘制下面两幅不完整的统计图，请你按要求回答下面问题



图①



图②

出题经常给两种统计图表进行出题，注意信息的互补作用，即可解出答案.

（1）本次问卷调查共调查了（　　）名观众

（2）图二中最喜爱的“新闻节目”的人数占调查总人数百分比为（　　），“综艺节目”在扇形统计图中所相应的圆心角度数为（　　）. 圆心角度数 = 百分比 × 360°

（3）补充图一的条型统计图.

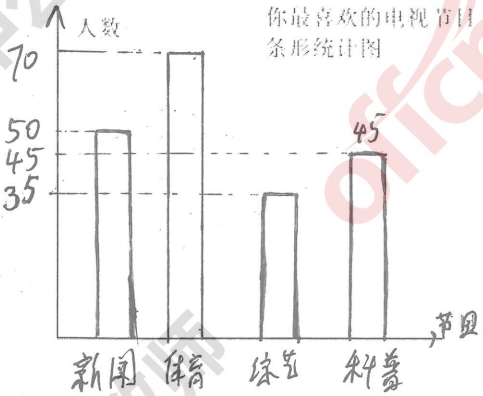
（4）现有最喜爱“新闻节目”记为 A，“体育节目”记为“B”，“综艺节目”记为 C，”科普节目”记为 D 的观众各一名，电视台要从四人中随机抽取两人参加联谊活动，请用列表或画树状图的方法，求出抽到最喜爱“B”和“C”两位观众的概率.

例题 6.【答案】（1）200；（2）25%，63°；（3）见图；（4）$\frac{1}{6}$.

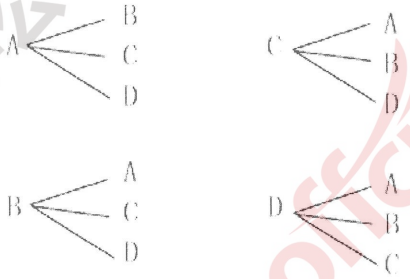
解析：（1）$\frac{45}{22.5\%}=200$ 人；

（2）最喜爱的“新闻节目”的人数占调查总人数百分比为 $\frac{50}{200}=25\%$，“综艺节目”在扇形统计图中所相应的圆心角度数为 $\frac{35}{200}\times360^\circ=63^\circ$；

（3）见图；



（4）如图；总共有 12 中可能，其中同时抽到喜爱 B，C 两类节目的可能有两种，所以抽到最喜爱“B”和“C”两位观众的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，


A
B
C
D
B
A
C
D
C
A
B
D
D
A
B
C

第三节 高中数学(上篇)

考点·集合

1．集合的运算

（1）交集：$A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$.

（2）并集：$A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$.

（3）补集：$\complement_U A=\{x|x\in U$，且 $x\notin A\}$.

2．集合的运算性质

（1）并集的性质：$A\cup\varnothing=A$；$A\cup A=A$；$A\cup B=B\cup A$；$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

（2）交集的性质：$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cap A=A$；$A\cap B=B\cap A$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

（3）补集的性质：$A\cup(\complement_U A)=U$；$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；$\complement_U(\complement_U A)=A$.

（4）摩根定律：$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

并的补等于补的交　　交的补等于补的并

例题 1．设集合 $A=\{x\mid y=\lg(-x^2+x+2)\}$，$B=\{x\mid x-a>0\}$，若 $A\subseteq B$ 则实数 a 的取值范围（　　）.

A．(-∞，-1)　　B．(-∞,-1]

C．(-∞，-2)　　D．(-∞，-2]

例题 1.【答案】B. 解析：由题可知 $A=(-1,2)$，$B=(a,+\infty)$，$A\subseteq B$，则 $-1\geq a$，即 $(-\infty,-1]$.

边界

例题 2. 已知集合 $A=\{y\mid y=\log_2 x(x>2)\}$，$B=\{y\mid y=\left(\frac{1}{2}\right)^x(x<1)\}$，则 $\complement_R A\cap B=$（　　）.

A．$\{y\mid 0<y<\frac{1}{2}\}$　　B．$\{y\mid 0<y<1\}$

C．$\{y\mid \frac{1}{2}<y\leq 1\}$　　D．$\varnothing$

例题 2.【答案】C．解析：集合 $A=\{y\mid y=\log_2 x(x>2)\}=\{y\mid y>1\}$，$B=\{y\mid y>\frac{1}{2}\}$，则 $\complement_R A\cap B=\{y\mid y\leq 1\}\cap\{y\mid y>\frac{1}{2}\}=\{y\mid \frac{1}{2}<y\leq 1\}$.

例题 3．已知集合 $A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x|2+3x>-4\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

A．$\{x|-1<x<1\}$　　B．$\{x|-2<x<1\}$

C．$\left\{x\middle|-\frac{2}{3}<x<1\right\}$　　D．$\{x|-3<x<-2\}$

例题 3.【答案】B．解析：因为 $A=\{x|x^2+2x-3<0\}=\{x|-3<x<1\}$，$B=\{x|2+3x>-4\}=\{x|x>-2\}$，所以 $A\cap B=\{x|-2<x<1\}$，故选 B.

例题 4．已知集合 $P=\{x|x^2-2x\geq 0\}$，$Q=\{x|1<x\leq 2\}$，则 $(C_R P)\cap Q=$_____.

例题 4.【答案】$(1,2)$．解析：P 解集为 $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$，补集为 $(0,2)$，$(C_R P)\cap Q=(1,2)$.

例题 5．集合 $A=\{x\mid x^2-16<0\}$，集合 $B=\{x\mid x=2t,t\in z\}$，则 $A\cap B=$_____.

偶数

例题 5.【答案】{-2，0，2}．解析：由 A 集合解得 $-4<x<4$，由 B 集合可知 x 能被 2 整除，联立可得{-2，0，2}．

例题 6．设集合 $A=\{x|x>1\}$，集合 $B=\{a+2\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是_____.

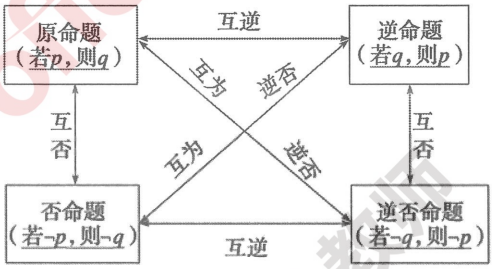
例题 6.【答案】$(-\infty,-1]$．解析：根据交集的性质，说明 $a+2$ 不是集合 A 里的元素，可知 $a+2\le 1$，因此 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$．

例题 7．已知集合 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，$A=\{-1,0,2\}$，则 $C_U A=$_____.

例题 7.【答案】$\{1,3\}$．解析：在全集为 U 的情况下，A 的补集是 $\{1,3\}$．

考点·简易逻辑

1．四种命题及相互关系



2．四种命题的真假关系

（1）两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性．

原真⇔逆否真
逆真⇔否真

（2）两个命题互为逆命题或互为否命题，它们的真假性没有关系．

3．充分条件与必要条件

（1）如果 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件．

充⇒要

（2）如果 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件．

4．简单复合命题的真值表

一真即真　一假即假

p	q	非 p	非 q	p 或 q	p 且 q
真	真	假	假	真	真
真	假	假	真	真	假
假	真	真	假	真	假
假	假	真	真	假	假

5．命题的否定

（1）全称命题的否定是特称命题；特称命题的否定是全称命题．

（2）p 或 q 的否定：非 p 且非 q；p 且 q 的否定：非 p 或非 q．

例题 1．已知 $p:\exists x_0\in(-1,0),x_0^{-2}<2^{x_0}$，$q:\forall a\in(0,\infty)$，函数 $y=|\tan ax|$ 最小正周期为 $\frac{\pi}{a}$，则下列命题中为真命题的是（　　）.

A．$p\wedge q$　　B．$p\wedge(\neg q)$

C．$p\vee q$　　D．$p\vee(\neg q)$

例题 1.【答案】C．解析：由题知，p 假，q 真，且一假则假，或一真则真，可知 C 正确.

例题 2．“$\sin x=\cos x+1$”是“$\tan\frac{x}{2}=1$”的（　　）.

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

例题 2.【答案】B．解析：当 $x=\pi$ 时，$\sin x=0,\cos x=-1$，满足 $\sin x=\cos x+1$，此时 $\tan\frac{x}{2}$ 不存在，则充分性不成立；若 $\tan\frac{x}{2}=1$，则 $\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$，据此可得：$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，此时 $\sin x=1,\cos x=0$，满足 $\sin x=\cos x+1$，即必要性成立，综上可得：“$\sin x=\cos x+1$”是“$\tan\frac{x}{2}=1$”的必要不充分条件．本题选择 B 选项.

小范围推大范围，小范围是大范围的充分条件，大范围是小范围的必要条件。

例题 3．“$x<1$”是“$3^x<1$“的（　　）.

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．即不充分也不必要条件

例题 3.【答案】B．解析：$0<1$，$3^0=1$，$3^x<1\Rightarrow x<0\Rightarrow x<1$．故“$x<1$”是“$3^x<1$“的必要不充分条件，选 B.

例题 4．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 均为单位向量，则“$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$ 是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的（　　）.

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

例题 4.【答案】C. 解析：因为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 均为单位向量，$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|\Leftrightarrow|\vec{a}-3\vec{b}|^2=|3\vec{a}+\vec{b}|^2\Leftrightarrow\vec{a}^2+9\vec{b}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}=9\vec{a}^2+\vec{b}^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$，所以“$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的充分必要条件，故选 C.

考点·函数的定义

设 A，B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x),x\in A$.

A中元素必取满　A到B可多对一，不可一对多
B中元素可剩余

例题 1．给定映射 $f(x,y)\to(x+2y,2x-y)$，在映射 f 的作用下（3，1）的原象为（　　）.

A．（1,3）　　B．(1，1)

C．(3,1)　　D．$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

例题 1.【答案】B．解析：由题干条件可知 $\begin{cases}x+2y=3\\2x-y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

例题 2．函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{9-x}$ 的定义域为（　　）.

A．（1，9）　　B．（1，9]

C．（1，2）∪（2，9）　　D．（1，2）∪（2，9]

例题 2.【答案】D．解析：由函数得 $\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \\ 9-x\geq 0 \end{cases}$，所以 $\begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \\ x\leq 9 \end{cases}$，所以定义域为（1，2）∪（2，9].

例题 3．当 $x\in(0,1)$ 时，函数 $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ 的值域是（　　）.

A．$[1,0)$　　B．$(-1,0]$

C．$(-1,0)$　　D．$[-1,0]$

例题 3.【答案】C．解析：$y=\dfrac{x-1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2(2x+1)}$，$x\in(0,1)$，则 $2(2x+1)\in(2,6)$，则 $\dfrac{3}{2(2x+1)}\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$，则 $y\in(-1,0)$.

例题 4．设 $f(x)=\begin{cases} 3^x, x<2 \\ \log_3 x, x\geq 2 \end{cases}$，则 $f\left[f(3)\right]$ 的值_____.

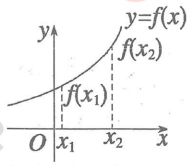
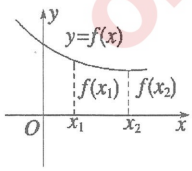
例题 4.【答案】3．解析：由题可知，$f(3)=\log_3 3=1$，$f\left[f(3)\right]=f(1)=3$.　先求里层，再求外层。

例题 5．函数 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$ 的定义域为_____.

例题 5.【答案】$\{x\,|\,-1\leq x\leq 3\}$．解析：由题意可知 $\begin{cases} 3-x\geq 0 \\ -1\leq\dfrac{3-2x}{5}\leq 1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\leq 3 \\ -1\leq x\leq 4 \end{cases}\Rightarrow -1\leq x\leq 3$.

由于正弦函数值域为[-1,1]
因此arcsinx的定义域为[-1,1]

考点・函数的单调性

	增函数	减函数
定义	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量 x_1,x_2	
	当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数	当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数
图象描述	 自左向右看图象是上升的	 自左向右看图象是下降的

符号方向相同　　符号方向相反

常用该定义证明增减函数。

例题 1．已知函数 $f(x)=\begin{cases} (3a-1)x+4a & x<1 \\ \log_a x & x\geq 1 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，那么 a 的取值范围是（　　）.

A．$(0,1)$　　B．$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

C. $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{7},1\right)$

例题 1.【答案】C．解析：由题意由$\begin{cases}3a-1<0\\(3a-1)+4a\geq\log_a 1\\0<a<1\end{cases}$，即$\begin{cases}a<\frac{1}{3}\\a\geq\frac{1}{7}\\0<a<1\end{cases}$，所以$\frac{1}{7}\leq a<\frac{1}{3}$.

例题 2．已知函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数，设 $a=e^{\frac{1}{e}},b=\ln\sqrt{2}-\frac{1}{3}\ln 3,c=\pi^{\frac{1}{\pi}}$，则下列不等式成立的是（　　）.

取对数 $\frac{\ln e}{e}$　　$\frac{\ln\pi}{\pi}$

A. $f(a)>f(b)>f(c)$　　B. $f(c)>f(a)>f(b)$

C. $f(c)>f(b)>f(a)$　　D. $f(a)>f(c)>f(b)$

例题 2.【答案】D．解析：令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,e)$ 上为增函数，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上为减函数，故 $\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}$，即 $e^{\frac{1}{e}}>\pi^{\frac{1}{\pi}}$，故 $a>c>0$，又 $\ln\sqrt{2}-\frac{1}{3}\ln 3=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}=\frac{\ln 4}{4}-\frac{\ln 3}{3}<0$，$\therefore a>c>b$，综上，$f(a)>f(c)>f(b)$，故选 D.

例题 3．函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-3)$ 的单调递减区间为_____.

>0

例题 3.【答案】$(-\infty,-1)$．解析：对数的真数大于 0，函数定义域为 $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$；本题关键为复合函数的单调性遵循同增异减原则，对数函数为单调递增函数，真数部分为单调递减的部分为 $x\in(-\infty,-1)$.

例题 4．已知函数 $f(x)=\frac{3x+1}{x+a}$ 的图象过点 $(1,-4)$.

（1）若 $f(x^2)=10$，求实数 x 的值；

（2）当 $x\in[-5,1]$ 时，求函数 $f(x)$ 的取值范围.

例题 4.【答案】（1）$x=\pm\sqrt{3}$；（2）$[-4,2]$.

解析：（1）$f(1)=\frac{4}{1+a}=-4$，$\therefore a=-2$，

$f(x^2)=\frac{3x^2+1}{x^2-2}=10,3x^2+1=10x^2-20$，

$\therefore 7x^2=21,x^2=3$，$\therefore x=\pm\sqrt{3}$；

（2）$f(x)=\frac{3x+1}{x-2}=\frac{3(x-2)+7}{x-2}=3+\frac{7}{x-2}$，

显然 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 与 $(-\infty,2)$ 上都是减函数，

$\because [-5,1]\subseteq(-\infty,2]$，$\therefore f(x)$ 在 $[-5,1]$ 上是减函数，

$\because f(-5)=3+\frac{7}{-7}=2, f(1)=3+\frac{7}{-1}=-4$，$\therefore f(x)\in[-4,2]$.

例题 5．设 $f(x)=\frac{1}{2}(x-5)^2+a\ln x$，其中 $a\in R$．

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 y 轴交于点（0，6），求 $f(x)$ 单调区间.

（2）设 $f'(x)$ 是 $y=f(x)$ 的导函数，$g(x)=x-5+2e^{2x}$，讨论 $g(x)=f'(x)$ 零点的个数.

例题 5.【答案】（1）$f(x)$ 在（0，2）和（3，+∞）上单调递增，在（2，3）上单调递减.

（2）当 $a>0$ 时，$g(x)=f'(x)$ 有一个零点，当 $a\le 0$ 时，$g(x)=f'(x)$ 没有零点.

注意导数问题先写出定义域

解析：（1）由已知得函数的定义域为（0，+∞），$f(1)=8$，$f'(x)=x-5+\frac{a}{x}$，$f'(1)=a-4$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-8=(a-4)(x-1)$，代入（0，6）可解得 $a=6$．所以 $f'(x)=x-5+\frac{6}{x}=\frac{(x-2)(x-3)}{x}$，所以 $f(x)$ 在（0，2）和（3，+∞）上单调递增，在（2，3）上单调递减.

（2）$g(x)=f'(x)$ 即 $x-5+\frac{a}{x}=x-5+2e^{2x}$，即 $a=2xe^{2x}$．因为 $y=2xe^{2x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，且 $2xe^{2x}|_{x=0}=0$，所以当 $a>0$ 时，$g(x)=f'(x)$ 有一个零点，当 $a\le 0$ 时，$g(x)=f'(x)$ 没有零点.

例题 6．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}a$（$a$ 为常数），$g(x)=\ln x-(a+1)x$．

（1）求函数 $g(x)$ 的单调区间.

（2）设 $F(x)=f(x)+g(x)$，若函数 $F(x)$ 在区间[1，＋∞）的最小值为－1，求实数 a 的取值范围.

例题 6.【答案】（1）①$a\le -1$ 时，在（0，＋∞）上 $g(x)$ 单调递增．②$a>-1$ 时，在 $(0,\frac{1}{a+1})$ 上 $g(x)$ 单调递增；在 $(\frac{1}{a+1},+\infty)$ 上 $g(x)$ 单调递减．（2）$a\ge 1$．

解析：（1）$g'(x)=\frac{1}{x}-(a+1)$（$x>0$）.

①当 $a+1\le 0$，即 $a\le -1$ 时，有在（0，＋∞）上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

②当 $a+1>0$，即 $a>-1$ 时，有在 $(0,\frac{1}{a+1})$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；在 $(\frac{1}{a+1},+\infty)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

（2）$F(x)=f(x)+g(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\frac{1}{2}a$，

$F'(x)=\frac{1}{x}+ax-(a+1)=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\frac{(x-1)(ax-1)}{x}$，

因为函数 $F(x)$ 在区间[1，+∞）的最小值为−1 且 $F(1)=-1$，所以在[1，+∞）上 $ax-1\geq 0$，即在[1，+∞）上 $a\geq\frac{1}{x}$，所以 $a\geq 1$.

找特殊值

考点·函数的奇偶性

（1）奇、偶函数的概念

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数. 关于y轴对称

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数. 关于原点对称

f(x)定义域在R上的奇函数 ⇒ f(0)=0

f(x)是奇函数 ⇏ f(0)=0，如 $f(x)=\frac{1}{x}$

奇函数的图象关于原点对称；偶函数的图象关于 y 轴对称.

（2）奇、偶函数的性质

①奇函数在关于原点对称的区间上的单调性相同，偶函数在关于原点对称的区间上的单调性相反.

②在公共定义域内，两个奇函数的和是奇函数，两个奇函数的积是偶函数；两个偶函数的和、积都是偶函数；一个奇函数，一个偶函数的积是奇函数.

③复合函数的奇偶性可以概括为“同奇则奇，一偶则偶”.

例题 1. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x\geq 0\\ x^2-2x, x<0\end{cases}$，则满足 $f(2x+1)>f(2)$ 成立的 x 取值范围是（　　）.

A. $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

例题 1.【答案】B. 解析：由题意，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x\geq 0\\ x^2-2x, x<0\end{cases}$，满足 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x\geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x<0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，又 $f(2x+1)>f(2)$，所以 $|2x+1|>2$，解得 $x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>\frac{1}{2}$，故选 B.

例题 2. 已知 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$ 则 $f(x)$ 为（　　）.

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 无法确定

例题 2.【答案】A. 解析：由题意知 $f(-x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，

$f(-x)+f(x)=\lg(\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1-x})=\lg 1=0$，所以为奇函数.

例题 3. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$（$a>0$，且 $a\neq 1$），若 $g(2)=a$，则 $f(2)=$_____.

例题 3.【答案】$\frac{15}{4}$. 解析：∵ $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$，$g(2)=a$，∴ $f(2)+g(2)=a^2-a^{-2}+2$ ①，∵ $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数．∴当 $x=-2$ 时，$f(-2)+g(-2)=a^{-2}-a^2+2$ ②，即 $-f(2)+g(2)=a^{-2}-a^2+2$ ③，①+③得：$2g(2)=4$，即 $g(2)=2$，又 $g(2)=a$，∴ $a=2$．代入①得：$f(2)+2=2^2-2^{-2}+2$，∴ $f(2)=2^2-2^{-2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$.

定义域为R ⇒ f(0)=0

例题 4. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}+a$ 是奇函数，则实数 a 的值为_____.

例题 4.【答案】$-\frac{1}{2}$. 解析：∵函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}+a$ 是奇函数，∴ $f(0)=\frac{1}{2^0+1}+a=0$，则 $a=-\frac{1}{2}$.

考点 • 函数的周期性

（1）周期函数：对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的任何值时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，称 T 为这个函数的周期.

（2）最小正周期：如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

（3）由周期函数的定义，采用迭代法可得结论

①函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的函数.

②若 $f(x+a)=\pm\frac{1}{f(x)}(a\neq 0)$ 恒成立，则 $T=2a$.

③若 $f(x+a)=f(x-a)$，则 $T=2a$.

④若 $f(x+a)=-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$，则 $T=4a$.

考点 • 函数的图象变换

（1）平移变换：$y=f(x\pm a)(a>0)$ 的图象，可由 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴方向向左或向右平移 a 个单位得到；$y=f(x)\pm b(b>0)$ 的图象，可由 $y=f(x)$ 的图象沿 y 轴方向向上或向下平移 b 个单位得到．即“左加右减，上加下减”.

（2）对称变换：$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；$y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称；$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称；$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

（3）伸缩变换：$y=kf(x)(k>0)$ 的图象，可由 $y=f(x)$ 的图象上每一个点的纵坐标伸长 $(k>1)$ 或缩短 $(k<1)$ 到原来的 k 倍而得到；$y=f(kx)(k>0)$ 的图象，可由 $y=f(x)$ 的图象上每一个点的横坐标伸长 $(k<1)$ 或缩短 $(k>1)$ 到原来的 $\frac{1}{k}$ 倍而得到.

（4）翻折变换：要得到 $y=|f(x)|$ 的图象，可先画出 $y=f(x)$ 的图象，然后“上不动，下翻上”即可得到；由于 $y=f(|x|)$ 是偶函数，要得到 $y=f(|x|)$ 的图象，可先画出 $y=f(x)$ 的图象，然后“右不动，左去掉，右翻左”即可得到.

考点·函数图象的对称性 注：看对称，重点关注定义域，即x的取值范围

一个函数

（1）若对函数 $y=f(x)$ 的定义域内的任一自变量 x 的值都有 $f(x)=2b-f(2a-x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 成中心对称.

（2）若对函数 $y=f(x)$ 的定义域内的任一自变量 x 的值都有 $f(x)=f(2a-x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 成轴对称.

两个函数

（3）函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=2b-f(2a-x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称.

（4）函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=f(2a-x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

例题．已知函数 $f(x)=(1+2x)(x^2+ax+b)\ (a,b\in R)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的值域为（　　）.

A. $\left[-8,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left[-7,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

C. $\left[-8,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[-7,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

① 求出 a.b.
② 求在 [-1,1] 上的单调性
③ 求值域.

例题.【答案】D. 解析：由题意得，函数 $f(x)=(1+2x)(x^2+ax+b)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，

则 $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=-f(0) \end{cases}$，即 $\begin{cases} 3(1+a+b)=0 \\ 5(4+2a+b)=-b \end{cases}$，解得 $a=-\frac{7}{2},b=\frac{5}{2}$，所以 $f(x)=(1+2x)\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}\right)$，

则 $f'(x)=6x^2-12x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(4x^2-8x+1)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $x_2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

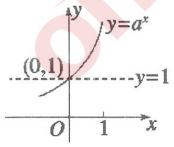
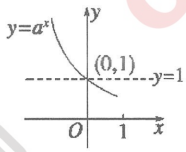
当 $x\in\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，则 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left[-1,1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-7$，$f(x)_{\max}=f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-7,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$，故选 D.

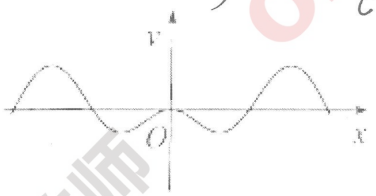
考点·指数函数的图象与性质

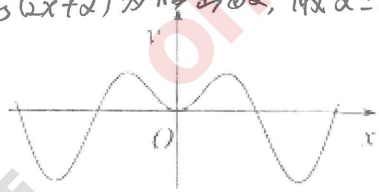
$y=a^x$	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	R	
值域	（0，+∞）	
性质	过定点（0，1）	
	当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$	当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$
	在（−∞，+∞）上是增函数	在（−∞，+∞）上是减函数

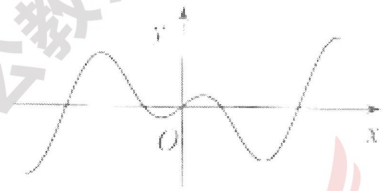
例题．已知 $f(x)=\underbrace{\frac{1-3^x}{1+3^x}}_{\text{奇函数}}\cos(2x+\alpha)$，$x\in\mathrm{R}$．则当 $\alpha\in[0,\ \pi]$ 时，$f(x)$ 的图像不可能是（　　）.

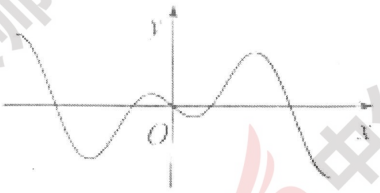
A.B. 偶函数. $\cos(2x+\alpha)$ 为奇函数. 取 $\alpha=\frac{\pi}{2}$

C.D. 奇函数. $\cos(2x+\alpha)$ 为偶函数, 取 $\alpha=0$ 或 π

A. 

B. 

C. 

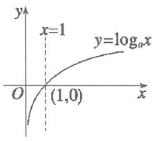
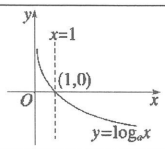
D. 

例题.【答案】A.

解析：记 $g(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}$，得 $g(-x)=\frac{1-3^{-x}}{1+3^{-x}}=\frac{3^x-1}{3^x+1}=-\frac{1-3^x}{1+3^x}=-g(x)$，

对于 A 和 B，图象关于 y 轴对称，所以，$f(x)$ 是偶函数，则有 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=-\frac{1-3^x}{1+3^x}\sin 2x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$，所以 A 不可能，B 有可能；对于 C 和 D，图象关于原点对称，所以 $f(x)$ 是奇函数，则有 $\alpha=0$ 或 π，$f(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}\cos 2x$，或 $f(x)=-\frac{1-3^x}{1+3^x}\cos 2x$，C 和 D 都有可能，故选 A.

考点·对数函数的图象与性质

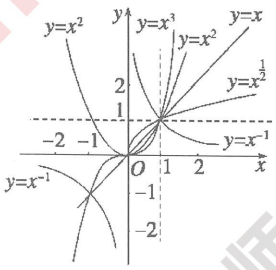
$y=\log_a x$	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	（0，+∞）	
值域	R	
性质	过定点（1，0）	
	当 $x>1$ 时，$y>0$；当 $0<x<1$ 时，$y<0$	当 $x>1$ 时，$y<0$；当 $0<x<1$ 时，$y>0$
	在（0，+∞）上是增函数	在（0，+∞）上是减函数

例题．函数 $y=\ln\left(x^2-x+2\right)$ 单调递增区间为_____

例题．【答案】$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$．解析：由题意，函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递增函数，而函数 $f(x)=x^2-x+2$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以函数 $y=\ln\left(x^2-x+2\right)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

考点：复合函数求单调区间

考点·幂函数的图象与性质



α为分数时，回归定义，按分数指数幂进行处理．

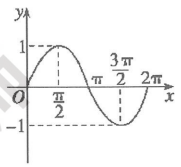
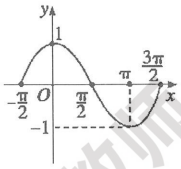
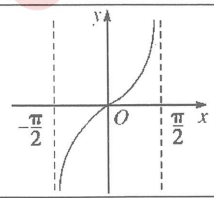
α为负数时，注意定义域．

$y=x^\alpha$	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=3$	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=-1$
定义域	R	R	R	[0，+∞）	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$
值域	R	[0，+∞）	R	[0，+∞）	$\{y\mid y\in\mathbf{R}$ 且 $y\neq 0\}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	增	$x\in$[0，+∞）时，增；	增	增	$x\in$（0，+∞）时，减；

		$x\in(-\infty,0]$时，减			$x\in(-\infty,0)$时，减

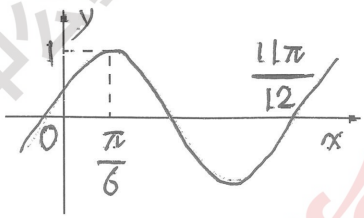
考点·三角函数的图象与变换

1．三角函数的图象和性质

函数性质	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
定义域	R	R	$\left\{x \mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$
在一个周期内的图象			
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
对称性	对称轴：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in Z)$ 对称中心：$(k\pi,0)(k\in Z)$	对称轴：$x=k\pi\,(k\in Z)$ 对称中心：$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right)(k\in Z)$	对称中心：$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$
周期	2π	2π	π
单调性	单调增区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$， 单调减区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)$	单调增区间 $[-\pi+2k\pi,2k\pi]$ 单调减区间 $[2k\pi,\pi+2k\pi]$ $(k\in Z)$	单调增区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ $(k\in Z)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数

2．函数 $y=\sin x$ 的图象经变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的步骤如下

例题 1．函数的部分图象如图示，则下列说法不正确的是（　　）．



A. $f(x)=sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 成中心对称

C. $k(x)=f\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+x$ 在 R 上单调递增

D. 已知函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到的函数图象关于原点对称

例题 1.【答案】D. 解析：根据函数 $f(x)$ 的部分图象，$f(x)=Asin(\omega x+\varphi)$，其中 A=1，$\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}$，$\therefore\omega=2$，再根据五点法作图可得 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 正确；当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$f(x)=0$，即 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 成中心对称，故 B 正确；$k(x)=f\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+x=sinx+x$，$\because k'(x)=\cos x+1\geq 0$，故函数 $k(x)$ 在 R 上单调递增，故 C 正确；把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到函数 $y=sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，由于函数 $y=sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 为非奇非偶函数，故它的图象不关于原点对称，故 D 错误，故选 D.

例题 2. 函数 $y=\sin 5x+\cos 5x$ 的最小正周期为_____.

例题 2.【答案】$\frac{2\pi}{5}$. 解析：由三角函数周期性可知，原函数可化简为 $y=\sqrt{2}\sin(5x+\frac{\pi}{4})$，其 $T=\frac{2\pi}{5}$.

"化繁为简"

负角 → 单角
不同角 → 同角
非同名正数 → 同名
多项式 → 单项式

考点 • 三角函数恒等变换

1. 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

（1）$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

（2）$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

（3）$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

2. 二倍角的正弦、余弦、正切公式

（1）$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

（2）$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

（3）$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

3. 辅助角公式

按顺序记忆 → 函数 $f(\alpha)=a\sin\alpha+b\cos\alpha$（$a,b$ 为常数）可以化为 $f(\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$ $(0\leq\varphi<2\pi)$，其中 φ 可由 a,b 的值唯一确定，$\tan\varphi=\frac{b}{a}$.

sin 在前
cos 在后

常符号

常见的有 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$；

$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$；

$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

例题 1．求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的增区间.

例题 1.【答案】$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.

解析：原式 $=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则次函数的增区间为 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 解出为 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{4}$，所以函数的增区间为 $\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$. 看"整体"

例题 2．已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{4})+\sin 2x+a$ 的最大值为 1.

注意常数项

（1）求常数 a 的值.

（2）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

例题 2.【答案】（1）$a=-1$；（2）$\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in Z)$.

解析：（1）$f(x)=2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{4})+\sin 2x+a=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+a$，所以 $f(x)_{\max}=2+a=1$，即 $a=-1$；

（2）当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12}$，所以 $f(x)$ 得单调区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in Z)$.

例题 3．已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\ \pi)$.

求（1）$\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值；

（2）$\cos2\alpha$ 的值.

$\begin{cases} a+b & a^2-b^2 \\ a-b & a^2+b^2 \end{cases}$

例题 3.【答案】（1）$\frac{\sqrt{17}}{3}$；（2）$-\frac{\sqrt{17}}{9}$.

解析：（1）由题意得 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$，

$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{8}{9}$，$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{17}{9}$，

又 $\because \sin\alpha\cos\alpha<0$，$\therefore \sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，

故 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

（2）$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{17}}{9}$.

考点·正余弦定理　　对边比对角

正弦定理应用：
(1).已知三角形的两角与一边，解三角形
(2).已知三角形的两边和其中一边所对的角，解三角形

1．正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 是三角形外接圆的半径．

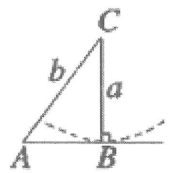
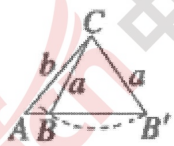
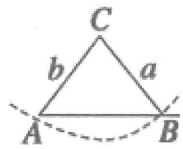
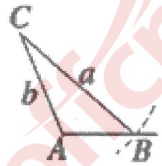
由正弦定理可以变形：（1）$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；（2）$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；（3）$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$等形式，以解决不同的三角形问题．

2．余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．余弦定理可以变形：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$．

余弦定理应用：
(1).已知两边及夹角求第三边
(2).已知三边求角.

3．$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$（$r$ 是三角形内切圆的半径），并可由此计算 R、r．

4．在△ABC 中，已知 a、b 和 A 时，解的情况如下

	A 为锐角			A 为钝角或直角
图形				
关系式	$a=b\sin A$	$b\sin A<a<b$	$a\geq b$	$a>b$
解的个数	一解	两解	一解	一解

总结：正、余弦定理构建了三角形中角、边的桥梁。笔试考试中的会用到正、余弦定理解三角形。

很多时候会同时用到两种定理进行变形。

例题 1．△ABC 中，a，b，c 分别为$\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边，且 2sinAcosC=2sinB-sinC．

（1）求∠A 的大小．

（2）在锐角△ABC 中，a=$\sqrt{3}$，求 c+b 取值范围．

例题 1．【答案】（1）$\frac{\pi}{3}$；（2）$(3,2\sqrt{3}]$．解析：

（1）2sinAcosC=2sinB-sinC，2acosC=2b-c，$2a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2b-c$，$b^2+c^2-a^2=bc$，$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}=\cos A$，$A=\frac{\pi}{3}$．

（2）$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，b=2sinB，c=2sinC，b+c=2(sinB+sinC)=2[sinB+sin($\frac{2\pi}{3}$-B)]=3sinB+$\sqrt{3}$cosB=2$\sqrt{3}$sin(B+$\frac{\pi}{6}$)，又△ABC 是锐角三角形，所以$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，

sin(B+$\frac{\pi}{6}$)$\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，2$\sqrt{3}$sin(B+$\frac{\pi}{6}$)$\in(3,2\sqrt{3}]$．

例题 2．在ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且满足 $b=a\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin A$．

（1）求角 A 的大小；

（2）若边长 $a=2$，求ΔABC 面积的最大值．

例题 2.【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$；（2）$\sqrt{3}$．

解析：（1）$b=a\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin A$，得 $\sin B=\sin A\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin A$，即

$\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin A$，得 $\sin C\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin A$，

$\therefore \tan A=\sqrt{3},\ A=\frac{\pi}{3}$．

（2）$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，即 $b^2+c^2-4=bc$，$\left(b+c\right)^2-4=3bc$，

$\therefore 3bc=\left(b+c\right)^2-4\geq\left(2\sqrt{bc}\right)^2-4$，即 $bc\leq 4$（当 $b=c$ 时等号成立），

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leq\sqrt{3}$．